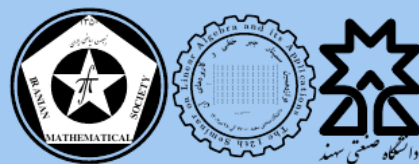


تیر ۱۴۰۲

مجموعه مقالات

دوازدهمین سمینار بین المللی  
جبر خطی و کاربردهای آن



Heydar Radjavi's Trace Theorem



$$S \sim S' \subseteq UT_n(\mathbb{C}) \\ \iff \\ \forall A, B, C \in S : \text{tr}(ABC) = \text{tr}(ACB).$$

پروفیسر حیدر رجوی

The 12th International Seminar on

Linear Algebra and its Applications

18 – 19 July 2023

Sahand University of Technology, Tabriz, Iran

دوازدهمین سمینار بین المللی

جبر خطی و کاربردهای آن

۲۷ الی ۲۸ تیر ۱۴۰۲

دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران

جواد فرضی

یوسف زمانی

ایلدار صادقی

دانشگاه صنعتی سهند تبریز



**مجموعه مقالات**  
**دوازدهمین سمینار بین المللی**  
**جبر خطی و کاربردهای آن**

**جواد فرضی**

**یوسف زمانی**

**ایلدار صادقی**

**دانشگاه صنعتی سهند تبریز**



**به نام خدا**



تقدیم به

حیدر رجوی

پدر جبر خطی ایران



پرتره حیدر رجوی توسط هنرمند محترم سعیده حسین زاده





# حامیان سمینار





# فهرست مطالب

	مقدمه
آ	پیشگفتار
آ	تجلیل از حیدر و اساتید و معلمان پیشکسوت ریاضی
ب	خاطرات آقای دکتر علی اکبر مهرورز از جناب آقای دکتر حیدر رجوی
ت	به یاد اساتید و معلمانی که ریاضی آموختند
ث	ساختار سازمانی سمینار
ج	کمیته علمی
ح	کمیته اجرایی
د	برنامه سمینار
ذ	

## عناوین مقالات - سخنرانی

۱	مروری بر تاریخ ریاضی پژوهی در ایران تا دهه ۱۳۴۰ ایرانی
۳	در باب استاد حیدر رجوی
۶	قاب ها، نیم - قاب ها و نمایش های القا شده
۹	کاربرد روش منظم سازی تیخونوف تکراری آرنولد برای بازسازی شکل یک جسم ناهمسانگرد
۱۴	تاریخچه ماتریس و دترمینان قبل از قرن بیستم
۲۱	یک روش تقریبی برای محاسبه ماتریس انتقال حالت
۲۵	جایابی ساختار ویژه: ابزاری موثر از جبرخطی جهت تشخیص عیب
۳۲	یافتن جواب بهینه دستگاه معادلات غیر خطی با روش بهینه سازی کپک مخاطی
۳۶	آنالیز همگرایی و پایداری یک روش عددی با مرتبه دقت بالا برای مسأله نفوذ کسری
۴۲	حل معادلات دیفرانسیل کسری با استفاده از موجک های بی اسپلاین خطی

## عناوین مقالات - پوستر

۴۶	بررسی حل پذیری دستگاه معادلات حاصل از روش هم محلی برای حل معادله انتگرال ولترای نوع سوم
۵۱	حل معادلات ماتریسی خطی به روش بهینه سازی تکامل تفاضلی

## کارگاه

۵۵	کارگاه جبر خطی تجربی
----	----------------------

۵۷	نمایه نویسندگان
----	-----------------

## پیشگفتار

رویدادهای علمی بستری برای ارائه آخرین دستاوردها و ملاقات متخصصین امر در جهت گسترش تبادل افکار، ارتباطات و همکاری‌های علمی است. از زمان برگزاری چهاردهمین کنفرانس سیستم‌های فازی ایران در سال ۱۳۹۳ توسط همکاران ریاضی دانشگاه صنعتی سهند نزدیک یک دهه می‌گذرد. اما این بار میزبان دوازدهمین سمینار بین‌المللی جبر خطی و کاربردهای آن بودیم که در روزهای سه‌شنبه و چهارشنبه ۲۷ و ۲۸ تیر ۱۴۰۲ در یک هوای لطیف در دانشگاه صنعتی سهند تبریز به صورت حضوری برگزار گردید. با وجود اینکه بعد از همه‌گیری ویروس کرونا همه کنفرانس‌های علمی به صورت مجازی برگزار می‌شد، برگزاری این سمینار به صورت حضوری آغازی بر پایان این دوره و بازگشت به زمان پیش از کرونا و گردهمایی‌های حضوری بود. هرچند این امر در نگاه نخست آسان نمی‌نمود اما با حسن نظر ریاست محترم انجمن ریاضی ایران، جناب آقای دکتر محمد صالح مصلحیان و حمایت کامل مدیریت دانشگاه، بخصوص ریاست محترم دانشگاه جناب آقای دکتر اسماعیل فاتحی فر، معاون پژوهشی و فناوری جناب آقای دکتر سید علیرضا طباطبایی نژاد و سایر مدیران دانشگاه، هماهنگی‌ها در سطح بسیار مطلوب برای برگزاری حضوری این سمینار شکل گرفت. با رونمایی از پوستر سمینار کارهای اجرایی این سمینار با جدیت بیشتر پیگیری شد، تا با تلاش‌های بی‌وقفه شاهد برگزاری مطلوب این سمینار باشیم. لازم است از تک‌تک اعضای کمیته علمی که با صرف وقت در جلسات کمیته علمی بر غنای این رویداد علمی افزودند تشکر کنیم. همچنین همکاران زیادی در کمیته اجرایی در بخش‌های مختلف ماه‌ها در تلاش بودند تا موارد اجرایی سمینار با کیفیت مطلوب پیش برود، که از همه این عزیزان صمیمانه تشکر می‌کنیم. از دانشجویان عزیزی که با شوق و علاقه خاصی در بخش‌های مختلف ثبت نام، دبیرخانه، اسکان و ... یاری دادند سپاسگزار می‌نماییم. در پایان این گفتار کوتاه خداوند متعال را برای این قدم ناچیز در تحقیقات کشور سپاسگزاریم و امیدواریم میزبان رویدادهای علمی دیگری باشیم.

دبیران سمینار

مرداد ۱۴۰۲

## تجلیل از حیدر و اساتید و معلمان پیشکسوت ریاضی

تا جهان بود از سر آدم فراز      کس نبود از راز دانش بی نیاز  
مردمان بخرد اندر هر زمان      راه دانش را به هر گونه زبان  
گرد کردند و گرامی داشتند      تا به سنگ اندر همی بنگاشتند  
دانش اندر دل چراغ روشنست      وز همه بد بر تن تو جوشنست

پیوند نام دانشمند ریاضی جناب استاد حیدر رجوی با جبر خطی و تجلیل از مقام علمی ایشان حال و هوای دیگری به سمینار داد. ارتباط ناگسستنی جبر خطی، حیدر رجوی و تبریز زمینه‌ای بود بر قدردانی از اساتید و معلمان پیشکسوت این شهر که بی شک تلاشهای بی دریغ ایشان نخبه‌های ریاضی را پرورش داده است. همکاری کمیته اجرایی سمینار با بنیاد ملی نخبگان استان آذربایجان شرقی و بخصوص ریاست محترم آن جناب آقای دکتر مهرداد امامی تبریزی و مدیر کل محترم دفتر الگوسازی و تکریم نخبگان جناب آقای دکتر محسن شاهرضایی و مدیر کل محترم و معاون محترم پژوهش، برنامه‌ریزی و توسعه منابع آموزش و پرورش استان آذربایجان شرقی اتفاق ارزشمندی را رقم زد و فرصتی ایجاد کرد تا با دعوت از اساتید و معلمان پیشکسوت ریاضی تبریز و با یاد عزیزان سفر کرده لحظات استثنایی به ثبت برسد.

بخصوص حضور استاد فرهیخته آقای دکتر مهدی رجبعلی‌پور و آقای دکتر بامداد یاحقی به عنوان سخنرانان کلیدی بخش تجلیل و همچنین حضور استاد ارجمند جناب آقای دکتر علی اکبر مهرورز و اساتید معزز آقای دکتر حسین سیفلو، آقای دکتر میر کمال میرنیا، آقای دکتر ابراهیم پور رضا، آقای دکتر یداله نژاد دهقان، آقای دکتر محمد یعقوب رحیمی اردبیلی و همچنین معلمان گرانقدر آقای محمد جواری، آقای رشید بهکام، آقای محسن قابچی و آقای مجید شیخ عظیمی برنامه افتتاحیه سمینار و تجلیل را بسیار پر بار نمود.

## خاطرات آقای دکتر علی اکبر مهرورز از جناب آقای دکتر حیدر رجوی

در سال های ۱۳۳۱ و ۱۳۳۲ کلاس ششم ریاضی در شهر تبریز با حضور ۵۰ تا ۶۰ دانش آموز از دانش آموزان دبیرستانهای تبریز و شهرهای اطراف و از جمله اورمیه در محل آملی تئاتر ساختمان دانشسرا در میدان دانشسرای فعلی تشکیل شده و ادامه یافت.

دانش آموزان کلاس همه به ششم ریاضی می گفتند، شش ریاضی . آقای دکتر رجوی هم در نامه های خود برای یادآوری خاطرات خودش، همیشه عبارت شش ریاضی را برای بیان مجموع خاطرات آن کلاس بکار می برد.

جناب آقای دکتر رجوی با چیدمان منحنی های حاصل از ترسیم نمودارهای قطبی شکلی نمادین از انسان را بوجود آوردند که بسیار مورد توجه استاد جناب آقای دکتر محمدعلی نورقالیچی و بقیه قرار گرفت.

آقای دکتر رجوی در کلاس شش ریاضی همیشه با خود الکل به همراه داشتند و برای ضد عفونی دست های خود استفاده می کردند.

در یکی از کنفرانس های ریاضی ایشان فرمودند که بکار بردن عنوان پروفیسوری بجای دکتر، صحیح نیست زیرا کلمه پروفیسور یک لفظ فرانسوی برای نام بردن معلم می باشد.

## به یاد اساتید و معلمانی که ریاضی آموختند

شمع وجود معلمان روشنای راه بسیاری از استعدادهای ریاضی شد، ریاضیاتی که به جرات می‌توان گفت افتخار آورترین شاخه دانش کشور در سطح جهانی بوده است. اما یاد و خاطره معلمانی که از میان ما پر کشیده‌اند فراموش نشدنی است. عزیزانی که ریاضیات را با اخلاص و عشق آموختند و از خود یادگاری ابدی بر جای گذاشتند و رفتند:

- آقای دکتر علی اصغر خلیل زاده
- آقای دکتر محمدعلی شهابی
- آقای بهروز مشکین قلم
- آقای جنگ دوست
- آقای داود طاووسی
- آقای اصغر حسین زاده اسکویی
- آقای حاجبی

یادشان جاودان

## ساختار سازمانی سمینار

- رئیس سمینار: دکتر اسماعیل فاتحی فر (ریاست محترم دانشگاه صنعتی سهند)
- دبیر سمینار: دکتر ایلدار صادقی
- دبیر علمی سمینار: دکتر یوسف زمانی
- دبیر اجرایی سمینار: دکتر جواد فرضی



## کمیته علمی

اعضای کمیته علمی دوازدهمین سمینار بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن

دانشگاه	عضو کمیته علمی
Ashoka University - India	Dr. Rajendra Bhatia
University of Waterloo - Canada	Dr. Heydar Radjavi
Sultan Qaboos University - Oman	Dr. Mohammad Shahryari
University of Nevada - USA	Dr. Tin-Yau Tam
Ataturk University - Turkey	Dr. Çetin Yildiz
دانشگاه صنعتی سهند	دکتر معصومه آذغانی
دانشگاه تهران	دکتر محمد باقر اسدی
دانشگاه ولی عصر رفسنجان	دکتر حمید رضا افشین (نماینده انجمن ریاضی)
دانشگاه صنعتی شریف	دکتر سعید اکبری
دانشگاه ولی عصر رفسنجان	دکتر فاطمه پنجه علی بیگ
دانشگاه مازندران	دکتر علی تقوی
دانشگاه فردوسی مشهد	دکتر فائزه توتونیان
دانشگاه بناب	دکتر علی حاجی بدلی
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان	دکتر قربانعلی حقیقت دوست بناب
دانشگاه شهید بهشتی	دکتر مسعود حجاریان
دانشگاه گیلان	دکتر داود خجسته
دانشگاه ولی عصر رفسنجان	دکتر محمدعلی دهقان
دانشگاه شهید باهنر کرمان	دکتر مهدی رجبعلی پور
دانشگاه مراغه	دکتر اصغر رحیمی
دانشگاه صنعتی سهند	دکتر یوسف زمانی (دبیر علمی سمینار)
دانشگاه شهید باهنر کرمان	دکتر عباس سالمی پاریزی

دانشگاه صنعتی سهند	دکتر ایلدار صادقی (دبیر سمینار)
دانشگاه حکیم سبزواری	دکتر علی اکبر عارفی جمال
دانشگاه تبریز	دکتر قدرت عبادی
دانشگاه شیراز	دکتر فرشید عبداللهی
دانشگاه صنعتی سهند	دکتر جواد فرضی (دبیر اجرایی سمینار)
دانشگاه صنعتی سهند	دکتر کاظم قنبری
دانشگاه بجنورد	دکتر محسن کیان
دانشگاه صنعتی سهند	دکتر پیام مختاری
دانشگاه تبریز	دکتر علیرضا مددی
دانشگاه فردوسی مشهد	دکتر محمد صالح مصلحیان
دانشگاه صنعتی سهند	دکتر حنیف میرزایی
دانشگاه اراک	دکتر علی محمد نظری
دانشگاه گلستان	دکتر بامداد رضا یاحقی

## کمیته اجرایی

اعضای کمیته اجرایی دوازدهمین سمینار بین المللی جبر خطی و کاربردهای آن

دکتر ایلدار صادقی	دبیر سمینار
دکتر جواد فرضی	دبیر اجرایی سمینار
دکتر یوسف زمانی	دبیر علمی سمینار
دکتر پیام مختاری	عضو کمیته اجرایی
دکتر حنیف میرزایی	عضو کمیته اجرایی
دکتر مجتبی حاجی پور	عضو کمیته اجرایی
دکتر سجاد مرادی	عضو کمیته اجرایی

کارکنانی که در برگزاری سمینار همکاری داشته‌اند:

عزیزا... صمدی

معصومه بهشتی

سکینه نادری

دانشجویانی که در برگزاری سمینار همکاری مستمر داشته‌اند:

- یگانه مسیبی
- فرشته تقی زاده
- الهه رزمی
- منیره یوسفی
- آیلا رضی زاده
- سپینود عزیزپور
- مینا پوزش
- آیلا صادقی
- سودا شکوری
- ثنا اسماعیلی







دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران

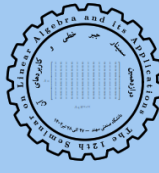
دوازدهمین سمینار بین المللی

جبر خطی

و کاربردهای آن



۲۷ الی ۲۸ تیرماه ۱۴۰۲



Sahand University of Technology, Tabriz, Iran

The 12th International Seminar on

Linear Algebra

and its Applications

July 18 - 19, 2023



## مروری بر تاریخ ریاضی پژوهی در ایران تا سال ۱۳۵۰ ایرانی

مهدی رجبعلی پور\*

گروه ریاضی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

### چکیده

در این مقاله مروری بر پژوهش‌های ریاضیات در ایران از پیش از اسلام تا دوران تربیت کارشناسی ارشد ریاضی ارائه می‌کنیم. اولین دوره فوق لیسانس ریاضی در دانشگاه تهران در مهر ۱۳۴۴ شد اما هیچ نشانه و انگیزه پژوهشی در آن وجود نداشت. در واقع، ورود اساتید محقق آن دانشگاه به دهه ۱۳۵۰ به بعد مربوط می‌شود که نسل‌های جوان از خارج به ایران آمدند. از نیمه اول دهه ۱۳۴۰، شادروان دکتر منوچهر وصال در دانشگاه پهلوی سابق (شیراز فعلی) و شادروان دکتر غلامحسین مصاحب در دانشگاه تربیت معلم تهران به طور جدی نگران عدم تحقیق توسط ریاضیدانان کشور بودند، اگرچه در خود توان شروع آن را نمی‌دیدند ولی به نسل‌های جوانی که در داخل کشور تربیت شوند اعتقاد داشتند. آقای دکتر وصال با استخدام فارغ التحصیلان جوانی از آمریکا همچون حیدر رجوی، دکتر جواد بهبودیان، دکتر مهدی بهزاد و دکتر میرباقری و آقای دکتر مصاحب با دعوت تنی چند از اساتید خارجی به ترتیب دوره فوق لیسانس ریاضی و دوره مدرسی ریاضیات را در دانشگاه‌های متبوع نوگشایی کردند. از سال ۱۳۴۰ تا ۱۳۴۹ جمعا ۴۵ مقاله توسط ریاضیدانان ایرانی در مجلات معتبر بین المللی ISI به چاپ رسید که ۱۷ مورد نام دکتر حیدر رجوی و ۱۱ مورد نام دکتر مهدی بهزاد را بر خود داشتند. این دو نفر به ترتیب متخصص نظریه عملگرها و نظریه گراف بودند و البته دکتر رجوی در نوشتن یکی دو مقاله در نظریه گراف با دکتر بهزاد همکاری کرد. علاوه بر اینها ۶ مقاله در آمار توسط ۵ تن از استادان دانشگاه‌های شیراز و تهران و ۵ مقاله در سیستم‌های دینامیکی توسط ۳ استاد در مجلات مزبور منتشر گردید. در این دهه دانش‌آموختگان دانشگاه شیراز و موسسه ریاضیات که برای ادامه تحصیل به خارج رفته بودند کم کم برگشتند و بازار تحقیقات ریاضی را گرمتر کردند و علاوه بر ۱۱۸ مقاله ISI چهار کتاب شامل یک تکنگرار ارزشمند را نیز منتشر کردند [۱-۴].

دکتر حیدر رجوی علاوه بر چاپ کتاب فوق، ۲۳ مقاله در این دهه منتشر کرد. نویسنده این مقاله نیز در نیمه دوم دهه مزبور با بازگشت به ایران در دانشگاه شیراز فعلی استخدام شد و جمعا ۱۹ مقاله با گرایش نظریه عملگرها در کل دهه انتشار داد. دکتر بهمن مهری با ۹ مقاله در معادلات دیفرانسیل و دکتر غلامحسین همدانی با ۹ مقاله در آمار و دکتر مهدی بهزاد با ۹ مقاله در نظریه گراف‌ها به غنای تحقیقات ریاضی افزودند. بقیه ۱۱۸ مقاله توسط ۵۴ تن از اساتید دانشگاه‌های سراسر کشور در گرایش‌های مختلف منتشر شده است به طوری که درصد هر محقق از این مقالات ۱/۶۹ می‌باشد. منظور ما از مقاله ممتاز، مقاله ISI و یا منتشر شده در بولتن انجمن ریاضی ایران است.

واژه‌های کلیدی: تاریخ ریاضی، ریاضی پژوهی در ایران

کد موضوع بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 01-XX, 01Axx

### مراجع

- [1] Behzad, Mehdi; Chartrand, Gary; Introduction to the Theory of Graphs. Allyn and Bacon Inc. Boston, Mass. 1971. ix+271 pp.
- [2] Radjavi, Heydar; Rosenthal, Peter; Invariant Subspaces. Springer-Verlag, New York/Heidelberg, 1973. xi+219 pp.

\*سخنران. آدرس ایمیل: mradjabalipour@gmail.com

- [3] Behzad, Mehdi; Chartrand, Gary; Lesniak-Foster, Linda; Graphs and Digraphs. PWS Publishers, Boston, Mass., 1979. x+406 pp.
- [4] Shahshahani, Seyavash; A New Mathematical Framework for the Study of Linkage and Selection. Mem. Amer. Math. Soc. 17 (1979), no. 211, ix+34 pp.



دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران

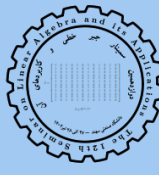
دوازدهمین سمینار بین المللی

جبر خطی

و کاربردهای آن



۲۷ الی ۲۸ تیرماه ۱۴۰۲



Sahand University of Technology, Tabriz, Iran

The 12th International Seminar on

Linear Algebra

and its Applications

July 18 - 19, 2023



## در باب استاد حیدر رجوی

بامداد یاحقی\*

گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه گلستان، گرگان، ایران

### چکیده

این نوشته یادداشتی در باب استاد حیدر رجوی است.

**واژه‌های کلیدی:** ماتریس، ریاضیات شریف، ریاضی‌دان، جبر خطی، نظریه عملگری، حیدر رجوی، عمر خیام، غلامحسین مصاحب، شمس‌الدین تبریزی.

کد موضوع بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 01A99

### پیش درآمد

یاران! چو به اتفاق دیدار کنید.  
باید که ز دوست یاد بسیار کنید.  
چون باده خوشگوار نوشید به هم،  
نوبت چو به ما رسد نگویند.

### عمر خیام

و من همواره سخت اشتیاق به پژوهش در باره این معادلات و جدا کردن حالات ممکن و ناممکن هر نوع از آنها را داشتم چرا که می‌دانستم این امر در حل مسائل دشوار به شدت مورد نیاز است. ولی گردش دوران همواره با پیشامدهایی همراه بود که پرداختن به این امر را به تعویق می‌انداخت و برای من فراغتی نمی‌گذاشت که صرف گردآوری این مطلب کنم و فکر خود را بر آن متمرکز سازم. زیرا گرفتار روزگاری هستیم که از اهل دانش تنها شمار کمی، (آن هم) مبتلا به هزاران رنج و محنت، باقی مانده‌اند که پیوسته در اندیشه آن‌اند که غفلت‌های زمان را فرصت جسته به تحقیق در دانش و استوار کردن آن پردازند. و (حال آنکه) عالم‌نمایان زمان ما حق را جامه باطل می‌پوشند (راست و دروغ را در هم می‌آمیزند) و گامی از حد خودنمایی و تظاهر به دانایی فرا نمی‌نهند. و آنچه را هم می‌دانند جز در راه اغراض مادی به کار نمی‌بندند. و اگر ببینند که کسی جستن حقیقت و برگزیدن راستی را شیوه کار خود ساخته است و در دوری از دروغ و خودنمایی و مکر و حيله سعی و کوشش دارد، او را خوار می‌شمرند و مسخره می‌کنند.

عمر خیام، مقدمه رساله جبر

ترجمه از عربی به فارسی از غلامحسین مصاحب با اندکی تصرف

\*سخنران. آدرس ایمیل: bammad5@hotmail.com, bbaammddaadd55@gmail.com



## درآمد

ای دوست!... ”گفتن جان کندن است و شنیدن جان پروردن.“

شمس‌الدین تبریزی

خوب و نیکوکار و تیزهوش است. فروتن و نابدی‌هی است. اهل دانش و فرهنگ است. نویسنده است. به ریاضیات شریف عشق می‌ورزد. در دانش و فرهنگ چندبُعدی است؛ در ریاضیات که جای خود دارد. ماتریسهای حقیقی و مختلط را خوب می‌شناسد. مثالهای فراوانی از آنها را، که بعضا استادانه ساخته شده‌اند، در چنته دارد. به واسطه مثالهای استادانه‌سازش نه تنها با سر که با دستهایش نیز می‌اندیشد! چند باری با نمایش اندیشیدن با دستهایش مرا دچار حیرت کرده است. از توصیه‌هایش به من این بود که گاه‌گاه با دستهایش بیندیش! و به هنگام افسردگی از نابه‌سامانی‌های پیرامون، که از توان ما خارج‌اند، آنها را نادیده بگیر و ریاضی بورز! پس به طور طبیعی، مشتاق ریاضی‌ورزی و گفتگو در باره ریاضی است. با هیچ‌کس مسابقه ندارد. بخشنده و مهربان است. کودکان را دوستان کوچکش می‌داند. نیوشا و دلنشین است. آزاد و رهاست. هم از این روی، زهد و ریا و تظاهر و تزویر را در حریمش راهی نیست. تشنه آموختن و آگاهی است. کتابخوان است. دنیادیده و روامدار است. منصف و منطقی است. بی‌تعصب و صمیمی است. بزرگ‌منش و با ظرفیت است. دست-و-دل-باز و سخاوتمند است. دیرسال و جوان‌دیدار است. در راستای راستی می‌پوید. بر دروغ عمود است. منظم و وقت‌شناس است. ساده-زیست و شادخوار است. درستکار است. شیرین‌گفتار و شوخ‌طبع است. در ریاضی‌ورزی و پیاده‌روی پایاست. خوش‌نویس است. طبع شاعری دارد. زیبایی را ارج می‌نهد. از ساکنان صافی این دیار خاکی است. به گمانم کهن‌سالترین ریاضی‌دان فعال ایرانی است. از معدود استادانی است که در هشتاد و هشت سالگی چونان استادی چهل-پنجاه ساله ریاضی می‌ورزد. درخت میوه‌ای را ماند که کهن‌سال است و ظاهرا بازنشسته. اما چون نیک بنگری پُربار است و به-بار-نشسته. شکلیا و پایور است. یار و یاور است. او یک ریاضی‌دان است. ریاضیدانی عاشق است. استاد ریاضی است. استاد جبر خطی است. استاد نظریه عملگری است. آری، از استادم حیدر رجوی سخن می‌گویم؛ شاد بود و دیر زیاد آن بزرگوار خداوند.

بگذشت سالیان که من لال می‌زنم،  
از پیروان پیرِ مغان، کمترین: منم.  
آموزگارِ خجسته در نیکویی و فضل،  
شد منتِ مواهبِ او طوقِ گردنم.  
استاد حیدر رجوی در نیکویی و فضل،  
شد منتِ مواهبِ او طوقِ گردنم...

«ای دوست!... ”حرف و معنی“ در این راه دراز است و به نوشتن راست ناید!» پس، سخن کوتاه کنم، والسلام!

## پس درآمد

### حیدر رجوی<sup>۱</sup>

روایت نخست.<sup>۲</sup>

بود حیدر-استاد ریاضی ز خاک تبریز،  
که همی گفت مسائل چه سهل اند و تمیز!  
رو بساز آرایه و ماتریسی: زبینه، بزرگ.  
بعد آن بریند اسرار و فنون، ریز به ریز.  
اینچنین خواهی کردن آری،  
تو همی حل مسائل بی جنگ و ستیز!

روایت دوم.

بود حیدر-استاد ریاضی  
ز خاک تبریز!  
که همی گفت:  
ریاضی: فال است،  
زیبا و تماشا و عزیز!  
نیک آموز و بورز آن را،  
با عشق بسی، روز-به-روز.  
همزمان برگیر ای دوست!  
تو اسرار و فنون، ریز به ریز!  
اینچنین خواهی کردن جاننا!  
کشف دنیای ریاضی،  
به زیبایی، با جان،  
و بی رنج و ستیز!

## مراجع

[۱] مصاحب، غلامحسین، حکیم عمر خیام به عنوان عالم جبر، سلسله انتشارات انجمن آثار ملی، تهران ۱۳۳۹.

<sup>۱</sup> حیدر بابا! روزگارت خوش و نورانی باد!

<sup>۲</sup> روایت نخست با الهام از پیام کوتاه زیر از باب پره (Bob Pare) در باره استاد حیدر رجوی است.

Heydar Radjavi

There once was a prof from Tabriz  
Who said solving problems' a breeze  
Just make a big matrix  
Then use everyday tricks  
You can prove whatever you please

Cheers,  
Bob

## قاب ها، نیم - قاب ها و نمایش های القا شده

احمد صفاپور\*

گروه ریاضی، دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان، رفسنجان، ایران

### چکیده

نظریه قاب به دلیل گستردگی حوزه نظری و کاربردهای آن، از موضوعات مورد علاقه پژوهشگران شاخه های تخصصی مختلف ریاضی از جمله آنالیز هارمونیک، آنالیز تابعی، جبرخطی و همچنین برخی شاخه های دیگر علوم و مهندسی بوده و هست. در این مقاله ابتدا به بررسی مفهوم نیم-قاب و تفاوت آن با قاب پرداخته و پس از ذکر برخی ویژگی های آن، ارتباط بین نیم-قاب ها و نمایش های القا شده توضیح داده می شود.

واژه های کلیدی: قاب، نیم-قاب، گروه توپوژیک، نمایش القا شده

کد موضوع بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 42C15, 22D30, 15A63

### ۱ مقدمه

قاب ها اولین بار در سال ۱۹۵۲ توسط دوفین و شیفر برای مطالعه سری های فوریه غیرهمساز معرفی شدند. توجه اصلی به این مفهوم از اواخر دهه ۸۰ قرن بیستم شروع شد. پس از روشن شدن اهمیت این ابزار جدید ریاضی، گروه وسیعی از پژوهشگران ریاضی و دیگر شاخه های علوم از جمله فیزیک، توجه خود را به بررسی قاب ها، انواع آن ها و همچنین کاربردهای آن ها معطوف کردند. در این نوشته  $H$  معرف یک فضای هیلبرت جدایی پذیر حقیقی یا مختلط و  $l^2(\mathbb{N})$  فضای تمام دنباله هایی است که با نرم  $l^2$  همگرا هستند. یک دنباله  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  از اعضای  $H$  یک قاب برای  $H$  نامیده می شود اگر اعداد مثبت و متناهی  $A$  و  $B$  وجود داشته باشند به طوری که برای هر بردار  $f \in H$  رابطه

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, f_n \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad (1)$$

برقرار باشد. اعداد  $A$  و  $B$  به ترتیب کران های پایینی و بالایی قاب نامیده می شوند. اگر  $A = B$ ، قاب را یک قاب چسبان و اگر  $A = B = 1$  آن را یک قاب پارسوال گویند. اگر به ازای هر  $m, n \in \mathbb{N}$  داشته باشیم  $\|f_m\| = \|f_n\|$  قاب را یک قاب هم اندازه و اگر  $\|f_n\| = \|f_m\| = 1$ ، آن را قاب با اندازه واحد نامند. یک قاب که هم چسبان بوده و هم با اندازه واحد باشد را قاب چسبان هم اندازه می نامند که به صورت UNTF نشان داده می شود. پایه های یکامتامد یک مثال بدیهی از این نوع قاب ها هستند.

به هر قاب  $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  یک عملگر  $S_F : H \rightarrow H$  نسبت داده می شود که برای هر  $f \in H$  به صورت زیر تعریف می شود

$$S_F(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n.$$

\* سخنران. آدرس ایمیل: safapour@vru.ac.ir

این عملگر کراندار، نامنفی و وارون پذیر با وارون کراندار  $S_F^{-1}$  است. اگر  $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$  دنباله ای در  $H$  باشد به طوری که به ازای هر  $f \in H$  رابطه ی

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle g_n$$

برقرار باشد، در این صورت  $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$  دوگان قاب  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  نامیده می شود. به عنوان مثال، دنباله ی  $\{S_F^{-1} f_n\}_{n=1}^{\infty}$  یک قاب و دوگانی برای قاب  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  است که دوگان کانونی این قاب نام دارد.

## ۲ قاب های ویل- هایزبرگ

یکی از فضاهایی که قاب ها در آن وسیعاً مورد بررسی قرار گرفته، فضای  $L^2(\mathbb{R})$  است. شناخته شده ترین نوع قاب در این فضا، قاب موسوم به «قاب ویل- هایزبرگ» یا «قاب گابور» است. این قاب که از نمایش گروه هایزبرگ روی فضای  $\mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}))$  یعنی فضای عملگرهای یکانی روی  $L^2(\mathbb{R})$  به دست می آید دارای ساختاری به شکل  $\{M_m T_n b\}_{m,n \in \mathbb{N}}$  می باشد که در آن  $a$  و  $b$  اعدادی حقیقی،  $f$  عضوی از  $L^2(\mathbb{R})$  و  $M$  و  $T$  به ترتیب عملگرهای مدولاسیون و انتقال هستند. این ساختار بعداً تعمیم یافت و به جای  $\mathbb{R}$ ، یک گروه دلخواه موضعا فشرده  $G$  قرار گرفت یعنی مفهوم قاب ویل- هایزبرگ به فضای  $L^2(G)$  تعمیم پیدا کرد [۱]، [۴].

## ۳ قاب و نیم-قاب

مفهوم نیم-قابها اولین بار در سال ۲۰۱۱ توسط آنتوان و بالاز [۱] معرفی شد. همان طور که بالا ذکر شد، شرط این که دنباله ای در یک فضای هیلبرت به عنوان یک قاب برای آن فضا شناخته شود، این است که در نامساوی دوگانه رابطه (۱) صدق کند. گاهی ممکن است با دنباله هایی مواجه شد که در عین این که فضای هیلبرت مورد نظر را تولید می کنند، اما تنها در یکی از دو نامساوی موجود در این رابطه صدق کنند. چنین دنباله هایی، «نیم-قاب» نامیده می شوند. در چنین حالت هایی، باز هم می توان برای این دنباله ها عملگر قاب  $S$  را تعریف کرد که کراندار، خودالحاق، مثبت و وارون پذیر بوده و وارون آن یعنی  $S^{-1}$  نیز چنین است. آنتوان و بالاز نیم-قابها را به شکل زیر تعریف کردند:

یک مجموعه از بردارها در یک فضای هیلبرت یک نیم-قاب بالا(پایین) نامیده می شود اگر

۱- اگر این مجموعه کامل باشد به این معنی که فضا را تولید کند،

۲- در نامساوی بالایی (پایینی) تعریف قاب صدق کند.

البته در اغلب متون مربوط به قابها، آنچه را در این تعریف نیم-قاب بالایی نامیده شده، به عنوان دنباله بسط کامل معرفی می کنند. آنتوان و بالاز در همان منبع ذکر می کنند که در حالت نیم-قاب بالایی، عملگر قاب  $S$  کراندار است اما  $S^{-1}$  کراندار نیست در حالی که در حالت نیم-قاب پایینی،  $S$  کراندار نیست ولی  $S^{-1}$  کراندار است. ویژگی های بیشتری از نیم قابها در همان منبع مورد بررسی قرار گرفته است.

## ۴ نیم-قابها و نمایش های القا شده

در این بخش فرض می کنیم  $G$  یک گروه موضعا فشرده بوده،  $H$  زیرگروهی از آن و  $\sigma : H \leftarrow \mathcal{U}(H_\sigma)$  نمایشی یکانی از  $H$  باشد. روندی وجود دارد که از آن طریق یک نمایش یکانی  $\rho$  از  $G$  توسط  $\sigma$  ایجاد می شود. این نمایش که با  $\rho^\sigma$  یا  $ind_H^G(\rho)$  نشان داده می شود، نمایش القا شده بر  $G$  توسط  $\rho$  نام دارد. توضیحات کامل در مورد این روند و نمایش های القا شده در [۲] آمده است. در اینجا به طور مختصر به این روند می پردازیم. فرض می کنیم

$$C(G, H_\sigma) = \{f : G \rightarrow H_\sigma, f \text{ is continuous.}\}.$$

زیرمجموعه ای از مجموعه بالا را که هر عضو آن مانند  $f$  در این شرایط که تصویر محمل  $f$  تحت نگاشت خارج قسمتی از  $G$  به  $G/H$  همبند بوده و برای هر  $x \in G$  و  $\alpha \in H$  داشته باشیم

$$f(x\alpha) = \sigma(\alpha^{-1})f(x)$$

صدق کند را با  $F_0$  نمایش می دهیم. با تعریف یک ضرب داخلی،  $F_0$  را به یک فضای ضرب داخلی تبدیل می کنیم. فرض می کنیم  $F$  متمم فضای هیلبرت این فضای ضرب داخلی باشد. در این صورت انتقال های چپ روی اعضای  $F$  نمایشی یکانی از  $G$  روی  $\mathcal{U}(F)$  تعریف می کند که همان نمایش القا شده روی  $G$  است. این نمایش را به طور ساده با  $\rho$  نشان می دهیم.

قضیه ۱.۴. فرض کنید  $G$  یک گروه فشرده آبلی بوده و  $H$ ،  $\sigma$ ،  $\rho$  و  $F$  همان باشند که در بالا ذکر شد. همچنین فرض کنید  $\{k_n\}$  دنباله ای در  $H$  و  $h_0 \in H_\sigma$  چنان باشند که  $\{\sigma(k_n^{-1} h_0)\}$  قابی برای  $H_\sigma$  با کران های  $A$  و  $B$  باشد. در این صورت،  $\{\rho(k_n^{-1})f\}$  یک نیم-قاب بالا برای  $F$  است که در آن  $f$  تابعی عضو  $F$  است به طوری که برای هر  $x$  در  $H$  داشته باشیم  $f(x) = h_0$ .

## مراجع

- [1] J. P. Antoine and P. Balazs, *Frames and semi-frames*, J. Phys. A.: Math. Theor. 44(2011)205201(25pp).
- [2] G. B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press, 1995.
- [3] G. Kutyniok, *Time frequency analysis on locally comact groups*, Ph.d Thesis. University of Paderborn, 2000.
- [4] A. Safapour, *On costruction of Weyl-Heisenberg frames*, Ph.D Thesis, Ferdowsi University of Mashhad, 2006.



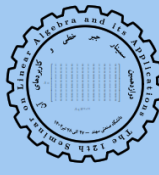
دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران

دوازدهمین سمینار بین المللی

جبر خطی

و کاربردهای آن

۲۷ الی ۲۸ تیرماه ۱۴۰۲



Sahand University of Technology, Tabriz, Iran

The 12th International Seminar on

Linear Algebra

and its Applications

July 18 - 19, 2023



## کاربرد روش منظم سازی تیخونوف تکراری آرنولدی برای بازسازی شکل یک جسم ناهمسانگرد در پراکندگی معکوس امواج الکترومغناطیسی

مریم حاجی صادقی اصفهانی \*

گروه ریاضی کاربردی و رمز، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، شاهین شهر، اصفهان

### چکیده

در این مقاله مسئله معکوس بازسازی شکل یک جسم ناهمسانگرد با استفاده از پراکندگی معکوس امواج الکترومغناطیسی حل شده است. این مسئله منجر به حل یک معادله انتگرالی فردهم نوع اول بدووضع می شود. برای حل دستگاه معادلات ناشی از گسسته سازی این معادله انتگرالی روش منظم سازی تیخونوف تکراری آرنولدی استفاده شده است. مثال های عددی ارائه شده، کارایی و دقت این روش را تأیید می کند.

واژه های کلیدی: روش منظم سازی تیخونوف تکراری، تجزیه آرنولدی، پراکندگی معکوس امواج الکترومغناطیسی، مسئله بدووضع

کد موضوع بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 45B05, 78A46, 47A52

### ۱ مقدمه

پراکندگی الکترومغناطیسی یک پدیده فیزیکی است که به موجب آن موج الکترومغناطیسی فرودی با برخورد به یک مانع پراکنده می شود و میدان کلی در هر نقطه از فضا به صورت مجموع میدان پراکنده شده و میدان فرودی نوشته می شود. مسئله پراکندگی مستقیم شامل یافتن میدان پراکنده شده است، هنگامی که ویژگی های فیزیکی و هندسی مانع کاملاً مشخص است. در حالی که مسئله پراکندگی معکوس منجر به مشخص کردن شکل مانع با استفاده از اطلاعات حاصل از میدان پراکنده شده در بی نهایت یا الگوی میدان دور می شود. پراکندگی موج تخت دارای هارمونیک زمانی  $u^i := e^{jkx.d}$ ، توسط یک استوانه ناهمسانگرد با طول نامتناهی و سطح مقطع  $D$  به صورت زیر توصیف می شود:

$$\nabla \cdot (A \nabla v) + k^2 n v = 0 \quad \text{in } D \quad (1)$$

$$\Delta u^s + k^2 u^s = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \quad (2)$$

$$v - u^s = e^{jkx.d} \quad \text{on } \partial D \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu_A} - \frac{\partial u^s}{\partial \nu} = \frac{\partial e^{jkx.d}}{\partial \nu} \quad \text{on } \partial D \quad (4)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial u^s}{\partial r} - j k u^s \right) = 0 \quad (5)$$

\* سخنران. آدرس ایمیل: hajisadeghi.math@gmail.com

که  $k > 0$  عدد موج،  $d := (\cos \phi, \sin \phi)$  جهت میدان فرودی،  $A$  ماتریس ناهمسانگردی،  $x = (x_1, x_2)$  و  $r = |x|$  میدان داخلی  $v(\cdot) := v(\cdot, \phi)$  و میدان پراکندگی  $u^s(\cdot) := u^s(\cdot, \phi)$  به زاویه فرود  $\phi$  بستگی دارد. میدان پراکندگی تشعشی  $u^s$  دارای رفتار مجانبی<sup>۱</sup>

$$u^s(x) = \frac{e^{jkr}}{\sqrt{r}} u_\infty(\theta, \phi) + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty$$

است که تابع  $u_\infty(\cdot, \phi)$  تعریف شده در  $[0, 2\pi]$  الگوی میدان دور متناظر با مساله پراکندگی (۱)-(۵) و بردار یکه  $\hat{x} := (\cos \theta, \sin \theta)$  جهت مشاهده است. الگوی میدان دور متناظر با (۱)-(۵) در رابطه تقابلی<sup>۲</sup>  $u_\infty(\theta, \phi) = u_\infty(\phi + \pi, \theta + \pi)$  صدق می کند و به صورت

$$u_\infty(\theta, \phi) = \frac{e^{j\pi/4}}{\sqrt{4\pi k}} \int_{\partial B} [u^s(y) \frac{\partial e^{-jk\hat{x}\cdot y}}{\partial \nu} - e^{-jk\hat{x}\cdot y} \frac{\partial u^s(y)}{\partial \nu}] ds(y), \quad (6)$$

داده می شود که  $\partial B$  مرز دامنه کراندار شامل  $D$  و یا همان مرز  $\partial D$  است.

**قضیه ۱.۱.** فرض کنید که الگوی میدان دور<sup>۳</sup>  $u_\infty$  متناظر با (۱)-(۵)، به ازای زاویه فرودی ثابت  $\phi$  و همه زوایای  $\theta \in [0, 2\pi]$  در شرط  $u_\infty = 0$  صدق کند. آن گاه در  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ ،  $u^s = 0$ .

□

اثبات. به مرجع [۱] مراجعه شود.

مساله پراکندگی معکوس که ما در این فصل به آن می پردازیم، شامل مشخص کردن  $D$  با استفاده از اطلاعات الگوی میدان دور  $u_\infty(\theta, \phi)$  به ازای همه زوایای فرود  $\phi \in [0, 2\pi]$  و زوایای مشاهده  $\theta \in [0, 2\pi]$  می باشد. عملگر میدان دور<sup>۴</sup>  $F : L^2[0, 2\pi] \rightarrow L^2[0, 2\pi]$  متناظر با (۱)-(۵)، به صورت زیر تعریف می شود

$$(Fg)(\theta) := \int_0^{2\pi} u_\infty(\theta, \phi) g(\phi) d\phi. \quad (7)$$

عملگر میدان دور نقش اساسی در حل مساله معکوس دارد. اولین مشکلی که باید حل شود، یک به یک و چگال بودن تصویر عملگر میدان دور  $F$  است.

با توجه به [۱] چون الگوی میدان دور  $u_\infty$  تحلیلی و عملگر میدان دور  $F$  فشرده است، معادله (۷) بدو وضع می باشد و برای حل آن باید از روش منظم سازی تیخونوف استفاده کرد. قضیه زیر رفتار جواب معادله (۷) را در کرانه  $D$  مشخص می کند:

**قضیه ۲.۱.** فرض کنید  $k^2$  مقدار ویژه لاپلاسیان منفی در پراکنده گر  $D$  نباشد. اگر  $F$  عملگر میدان دور متناظر با (۱)-(۵) باشد، آن گاه

(۱) اگر  $z \in D$ ، به ازای هر  $\varepsilon > 0$  تابع  $g_z \in L^2(\Omega)$  وجود دارد به طوری که

$$\|Fg_z - \phi_\infty(\cdot, z)\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon$$

و وقتی  $z \in D$  به کرانه شکل نزدیک می شود

$$\lim_{z \rightarrow \Gamma} \|g_z\|_{L^2(\Omega)} = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \Gamma} \|v_{g_z}\|_{H^1(D)} = \infty$$

که  $v_{g_z} = \int_\Omega e^{ikx \cdot d} g(d) ds(d)$  تابع موج هرگلوتر با کرنل  $g_z$  است. (۲) اگر نقطه  $z$  خارج از  $D$  باشد، به ازای هر  $\varepsilon > 0$  و  $\delta > 0$  تابع  $g_z \in L^2(\Omega)$  وجود دارد به طوری که

$$\|Fg_z - \phi_\infty(\cdot, z)\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon + \delta$$

و

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|g_z\|_{L^2(\Omega)} = \infty, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \|v_{g_z}\|_{H^1(D)} = \infty.$$

<sup>1</sup>Asymptotic behavior

<sup>2</sup>Reciprocity relation

<sup>3</sup>Far field pattern

<sup>4</sup>Far field operator

اثبات. برای مشاهده اثبات این قضیه به [۲] مراجعه کنید. □

اساس روش نمونه برداری خطی، مشخص کردن  $g_z$  قضیه قبل به صورت عددی و نهایتاً تعیین شی پراکنده گر  $D$  می باشد. اجرای روش نمونه برداری خطی به صورت زیر است:

۱. شبکه ای از نقاط تحت عنوان نقاط نمونه را در یک ناحیه مشخص انتخاب می کنیم به طوری که شامل  $D$  باشد.
۲. با استفاده از روش منظم سازی تیخونوف تکراری آرنولدی، معادله میدان دور را به ازای هر  $z$  از نقاط نمونه حل کرده و جواب تقریبی برای  $g_z$  را بدست می آوریم.
۳. مرز  $\partial D$  را نقاطی مشخص می کنند که به ازای آنها  $\|g_z\|_{L^\infty[0, 2\pi]}$  بیکران شود.

## ۲ روش منظم سازی تیخونوف تکراری آرنولدی

گسسته سازی معادله میدان دور منجر به حل دستگاه بدشرط

$$Ax = b \quad (۸)$$

می شود که در آن  $A$  یک ماتریس مربعی  $n \times n$  است. برای حل این معادله باید از روش های منظم سازی تیخونوف استفاده کرد. این روش منجر به حل مسئله می نیم سازی

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \|Ax - b^\delta\|^2 + \alpha \|x\|^2 \} \quad (۹)$$

می شود که

$$b^\delta = b + e$$

$\alpha > 0$  پارامتر منظم سازی و  $e$  خطای  $b$  است. جواب معادله (۹) به صورت

$$x^{(\alpha)} = A^T(AA^T + \alpha I)^{-1} b^\delta \quad (۱۰)$$

بدست می آید. فرض کنید  $x^{(k)}$  جواب تقریبی مسئله (۸) باشد که از روش تقریبی بدست آمده است. اگر خطای نامعلوم را به صورت  $e^{(k)} = x^\dagger - x^{(k)}$  تعریف کنیم ( $x^\dagger$  جواب دقیق معادله است) و اگر  $h^{(k)}$  تقریبی از  $e^{(k)}$  باشد، معادله خطا به صورت

$$Ah^{(k)} = r^{(k)}, \quad r^{(k)} = b^\delta - Ax^{(k)} \quad (۱۱)$$

نوشته می شود. از آنجایی که ماتریس  $A$  بدشرط و  $r^{(k)}$  با خطا همراه است، جواب معادله (۱۱) با روش منظم سازی تیخونوف به صورت

$$h^{(k)} = A^T(AA^T + \alpha I)^{-1} r^{(k)}$$

نوشته می شود. بنابراین جواب تقریبی بهبود یافته برای  $x^\dagger$  به صورت

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h^{(k)} = x^{(k)} + A^T(AA^T + \alpha I)^{-1} r^{(k)} \quad (۱۲)$$

بدست می آید. این روش تکراری به روش تکراری تیخونوف معروف است. حال توجه خود را به روش تیخونوف تکراری آرنولدی معطوف می کنیم. فرض کنید  $p$  امین مرحله از الگوریتم آرنولدی بر ماتریس  $A$  با بردار اولیه  $b^\delta$  اعمال شده و تجزیه

$$AV_p = V_{p+1} H_{p+1,p}, \quad (۱۳)$$



بدست آمده است که  $V_{p+1} = [v_1, v_2, \dots, v_{p+1}] \in \mathbb{R}^{n \times (p+1)}$  دارای ستون های متعامد یکه  $j = 1, \dots, p+1$  است و  $V_p$  از  $p$  ستون اول  $V_{p+1}$  تشکیل شده است. علاوه بر آن  $H_{p+1,p} \in \mathbb{R}^{(p+1) \times p}$  ماتریسی بالا هسنبرگی است. برد  $V_p$  زیرفضای کرایلف

$$\mathbb{K}_p = \text{span}\{b^\delta, Ab^\delta, \dots, A^{p-1}b^\delta\};$$

است. با جایگزاری رابطه (۱۳) در رابطه (۱۲) جواب تقریبی تصویری برای (۸) در زیرفضای کرایلف  $\mathbb{K}_p$  به صورت

$$x_p^{(k+1)} = x_p^{(k)} + h_p^{(k)} = x_p^{(k)} + V_p(H_{p+1,p}^T H_{p+1,p} + \alpha_p^{(k)} I)^{-1} H_{p+1,p}^T V_{p+1}^T r_p^{(k)} \quad (14)$$

بدست می آید. یکی از مزیت های استفاده از تجزیه آرنولدی، عدم نیاز به محاسبه ضرب بردار در ماتریس  $A$  و افزایش کارایی محاسبات است.

در الگوریتم ۱ جزئیات روش منظم سازی تیخونوف تکراری آرنولدی و نحوه ی محاسبه ی پارامتر منظم سازی تیخونوف در هر مرحله آمده است. برای دریافت جزئیات بیشتر به [۳] مراجعه کنید.

### الگوریتم ۱ منظم سازی تیخونوف تکراری آرنولدی

```

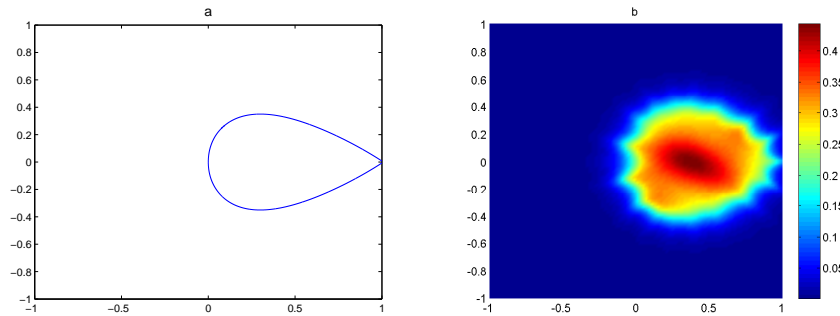
 $r_p^{(0)} = b^\delta - Ax_p^{(0)}$ 
 $\tau = \frac{1+\rho}{1-\rho}$ 
 $V_p = b^\delta / \|b^\delta\|$ 
for  $p = 1, 2, \dots$  do
     $k = 0$ 
     $AV_p = V_{p+1} H_{p+1,p}$ 
     $\tau_p^{(k)} = \|r_p^{(k)}\| / \delta$ 
     $q_p^{(k)} = \max \{q, \rho + (1 + \rho) / \tau_p^{(k)}\}$ 
    while  $(\hat{r}_{p+1}^{(k)})^\vee < q_p^\vee \sum_{j=1}^{p+1} (\hat{r}_j^{(k)})^\vee$  do
        Determine  $\alpha_p^{(k)}$  such that  $q_p^\vee \| \hat{r}_p^{(k)} \|^\vee = \| \hat{r}_p^{(k)} - \bar{\Sigma} (\bar{\Sigma} + \alpha_p^{(k)} I)^{-1} \hat{r}_p^{(k)} \|^\vee$ 
         $h_p^{(k)} = V_p (H_{p+1,p}^T H_{p+1,p} + \alpha_p^{(k)} I)^{-1} H_{p+1,p}^T V_{p+1}^T r_p^{(k)}$ 
         $x_p^{(k+1)} = x_p^{(k)} + h_p^{(k)}$ 
         $r_p^{(k+1)} = b^\delta - Ax_p^{(k+1)}$ 
        if  $\|r_p^{(k+1)}\| \leq \tau \delta$  then
            Stop
        end if
         $k = k + 1$ 
         $\tau_p^{(k)} = \|r_p^{(k)}\| / \delta$ 
         $q_p = \max \{q, \rho + (1 + \rho) / \tau_p^{(k)}\}$ 
    end while
     $x_{p+1}^{(0)} := x_p^{(k)}$ 
end for

```

$$\bar{\Sigma} := \Sigma \Sigma^T \in \mathbb{R}^{(p+1) \times (p+1)} \text{ و } H_{p+1,p} \text{ تجزیه SVD ماتریس } H_{p+1,p} = U \Sigma W^T \text{ که}$$

### ۳ نتایج عددی

فرض کنید مساله پراکندگی مستقیم با روش های عددی حل شده است [۴] و الگوی میدان دور از میدان منتشر شده از رابطه (۶) به دست آمده است:



شکل ۱: (a) استوانه ایرفویل شکل ناهمسانگرد با مشخصات  $\epsilon_r = 0.75$ ,  $\mu_{xx} = \mu_{yy} = 4$ ,  $\mu_{xy} = 2 + j$ ,  $\mu_{yx} = 2 - j$  (b) شکل بازسازی شده

داده های حاصل به صورت ماتریس  $F \in \mathbb{C}^{32 \times 32}$  نمایش داده می شوند، که درایه های ماتریس،  $j, l \in \{1, 2, \dots, 32\}$ ، میدان دور متناظر با جهت فرود موج تخت  $\theta_j = \frac{2\pi j}{32}$  و نقطه مشاهده  $\theta_l = \frac{2\pi l}{32}$  می باشد. برای بازسازی شیء، شبکه  $\mathcal{G}$  از  $100 \times 100$  نقطه نمونه که به طور مساوی روی یک مربع  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  توزیع شده اند، در نظر می گیریم.

مثال ۰.۱۰۳. در آخرین مثال یک پراکنده گر ایرفویل شکل به معادله

$$y = \frac{0.7}{0.2} [0.2969\sqrt{x} - 0.1260x - 0.3516x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4]$$

بازسازی شده است. مشخصات ساختاری این ایرفویل دی الکتریک ناهمسانگرد به صورت  $\epsilon_{zz} = 0.75$ ,  $\mu_{xx} = \mu_{yy} = 4$ ,  $\mu_{xy} = 2 + j$ ,  $\mu_{yx} = 2 - j$  است. ایرفویل بازسازی شده در شکل (۱) نشان داده شده است.

## ۴ نتیجه گیری

در این مقاله یک روش کارا برای حل مسئله معکوس بازسازی شکل یک جسم ناهمسانگرد در پراکنده گی معکوس امواج الکترومغناطیسی ارائه شد. حل این مسئله منجر به حل یک معادله فردهم نوع اول بدوضع می شود که برای رفع مشکل بدوضعی روش منظم سازی تیخونوف تکراری آرنولدی پیشنهاد شد. نتایج عددی کارایی و دقت روش مورد نظر را نشان می دهد.

## مراجع

- [1] F. Cakoni , D.Colton, *Qualitative Methods in Inverse Scattering Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg; 2014.
- [2] F. Cakoni and D. Colton, On the mathematical basis of the linear sampling method, *Georg. Math. J*, 10 (2003), no. 3, 411–425.
- [3] A. Buccini, L. Onisk, & L. Reichel, An Arnoldi-based preconditioner for iterated Tikhonov regularization. *Numer Algor*, 92(2023), 223–245.
- [4] M. Hajisadeghi Esfahani, H. Roohani Ghehsareh, S.K.l Etesami, The extended method of approximate particular solutions to simulate two-dimensional electromagnetic scattering from arbitrary shaped anisotropic objects, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 82(2017), 91–97.



دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران

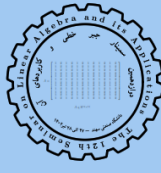
دوازدهمین سمینار بین المللی

جبر خطی

و کاربردهای آن



۲۷ الی ۲۸ تیرماه ۱۴۰۲



Sahand University of Technology, Tabriz, Iran

The 12th International Seminar on

Linear Algebra

and its Applications

July 18 - 19, 2023



## تاریخچه ماتریس و دترمینان قبل از قرن بیستم

علی محمد نظری \*

گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه اراک، اراک، ایران کد پستی ۳۸۱۵۶-۸-۸۳۴۹

### چکیده

در این مقاله تاریخچه ماتریس و دترمینان از آغاز تا ابتدای قرن بیستم مورد بررسی قرار می‌گیرد. اما در قرن بیستم آن چنان نظریه ماتریس‌ها شاخه گسترانده که نوشتن تاریخچه در باره آن احتمالاً بسیار حجیم خواهد بود و باید برای هر کدام از موضوعات تاریخچه جداگانه نوشت. این که روش حذفی گاوس سابقه‌ای بیش از ۲۰۰۰ سال دارد از نکاتی است که به آن می‌پردازیم. می‌خواهیم بدانیم دترمینان‌ها و ماتریس‌ها توسط چه کسانی قبل از قرن بیستم معرفی و توسعه داده شدند. او این ایرانی را که مقاله در زمینه جبرخطی داشته است، معرفی می‌نماییم.

واژه‌های کلیدی: ماتریس‌ها، دترمینان، دستگاه‌های معادلات خطی.

کد موضوع بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 15A18، 15A29

### ۱ مقدمه

اگر اجداد ما ایرانیان را بابلیان عصر حمورابی قلمداد نماییم باید بگوییم ایرانیان اولین ابداع کننده جبر خطی و ماتریس‌ها بودند. یکی از مباحث بسیار مهم در عالم ریاضیات جبر خطی است که امروزه کاربردش در سایر علوم در حال گسترش زیادی است و کیست که نداند ماتریس‌ها قلب تپنده جبر خطی‌اند و از ابتدای قرن هفدهم دترمینان‌ها هم مطرح و هم مورد استفاده بودند. آنچه که امروزه به عنوان ماتریس می‌شناسیم تقریباً در اواخر قرن نوزدهم مورد استفاده قرار گرفت. یعنی دترمینان‌ها قبل از ماتریس‌ها تعریف شده و مورد استفاده جدی بودند. در این مقاله بنا داریم تاریخچه دترمینان و ماتریس را مورد بررسی قرار دهیم و مشخص کنیم کدام دانشمندان در این زمینه نظریات مهمی داشتند و به توسعه این شاخه از ریاضیات کمک نمودند. در نهایت به معرفی و خلاصه‌ای از زندگی اولین ایرانی می‌پردازیم که اولین مقاله علمی را در باره دترمینان‌ها نوشته است.

### ۲ الواح گلی بابلیان نقطه شروع و صد سال بعد چینیان

تعجب آور نیست که آغاز ماتریس‌ها و دترمینان‌ها باید از طریق مطالعه دستگاه‌های معادلات خطی مورد مطالعه قرار داد. فقط و فقط در شهر نیپور عراق بالغ بر نیم میلیون لوح گلی از زیر خاک بیرون آورده شد و از این میان تنها ۳۰۰ لوح مربوط به عالم ریاضیات بود [۱]. در بررسی این الواح مشخص گردید که ایرانیان مسائلی را مطرح نمودند که حل آن‌ها منجر به حل یک دستگاه دو معادله خطی می‌شود، به عنوان مثال یک لوح مربوط به حدود ۳۰۰ قبل از میلاد (دوره حکومت سلوکیان که دست‌نشانندگان یونانیان در ایران بودند) در [۴] با تبدیل واحدهایش به واحدهای امروزی دارای شکل زیر است:  
دو مزرعه وجود دارد که مساحت آنها ۱۸۰۰ یارد مربع است. یکی با نرخ ۲۳۳۲ بوشل<sup>۱</sup> در هر یارد مربع غلات تولید می‌کند در حالی که دیگری با نرخ ۱۲۲۱ بوشل در هر یارد مربع غلات تولید می‌کند. اگر کل بازده ۱۱۰۰ بوشل باشد، اندازه هر مزرعه چقدر است.

\* سخنران. آدرس ایمیل: a-nazari@araku.ac.ir

<sup>۱</sup> بوشل (به انگلیسی: bushel) با حرف اختصاری bsh. یا bu. یکای اندازه‌گیری وزن در دستگاه امپراتوری و دستگاه آمریکایی هست که جزو اندازه‌گیری خشک محسوب می‌گردد و در این دستگاه‌ها برابر با ۴ پک (یکا) (به انگلیسی: peck) یا گالون است. این یکا برای اندازه‌گیری وزن مواد خشکی که مایع نباشند در کشاورزی کاربرد دارد. ۱ بوشل انگلیسی = ۸ گالون امپراتوری ≈ ۳۶۸۷.۳۶ لیتر

اگر یک مدل ساده ریاضی برای مسئله فوق بنویسیم، پرواضح است که حاصل یک دستگاه دو معادله و دو مجهول خطی خواهد بود.

چینیان بین سال‌های ۲۰۰ تا ۱۰۰ قبل از میلاد، خیلی بیشتر از بابلی‌ها به ماتریس‌ها نزدیک شدند. در واقع منصفانه است که بگوییم کتاب حساب در نه بخش (ترجمه دکتر وحیدی اصل [۱]) یا نه بخش در مورد هنر ریاضی (*suanshu Jiuzhang*) یک کتاب راهنمای کاربردی ریاضیات متشکل از ۲۴۶ مسئله است که برای ارائه روش‌هایی برای حل مسائل روزمره مهندسی، نقشه برداری، تجارت و مالیات طراحی شده است. مسئله زیر و مشابهت آن‌را با مسئله بالا از این کتاب ببینید:

سه نوع ذرت داریم که مجموع سه دسته از اولی و دو دسته از دومی و یک دسته از سومی برابر با ۳۹ پیمانه است. مجموع دو دسته از اولی، سه دسته از دومی و یک دسته از سومی ۳۴ پیمانه است و مجموع یک دسته از اولی، دو دسته از دومی و سه دسته از سومی ۲۶ پیمانه است. چند پیمانه ذرت در یک دسته از هر نوع وجود دارد؟

اکنون نویسنده ضرایب دستگاه سه معادله خطی را در سه مجهول به عنوان یک جدول روی یک «تخته شمارش» می‌نویسد؛

یعنی:

$$\begin{array}{ccc} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۱ \\ ۲۶ & ۳۴ & ۳۹ \end{array}$$

روش‌های اواخر قرن بیستم ما از ما می‌خواستند معادلات خطی را به‌عنوان سطرهای ماتریس بنویسیم تا ستون‌ها، ولی هم‌چنان‌که در مثال فوق مشاهده می‌کنیم چینیان این کار را به‌صورت ستونی انجام می‌دادند و البته در حل مسئله توفیری نمی‌کند (نوشتن ستونی اعداد کاملاً طبیعی است زیرا چینیان کار نوشتن همه متون را ستونی انجام می‌دادند). نکته قابل توجه این نویسنده که در سال ۲۰۰ قبل از میلاد نوشته است، به خواننده دستور می‌دهد که ستون وسط را در ۳ ضرب کند و از دو برابر ستون سمت راست کم کند و به‌جای ستون دوم قرار دهد، سپس همین کار با کم کردن ستون سمت راست تا از ۳ برابر ستون اول انجام داده و به‌جای اولین ستون سمت چپ قرار دهد. سپس ستون سمت چپ در ۵ ضرب می‌شود و از چهار برابر ستون وسط کم شود. اکنون ضرایب دستگاه به‌شکل مثلی تبدیل شده‌اند و آن‌ها نیز با روش جایگزینی از آخر کاملاً آشنا بوده‌اند که در متن همین کتاب آورده‌اند: «از آن می‌توان نوع سوم ذرت را یافت، سپس نوع دوم و بعد از آن ذرت نوع اول را با جایگزینی پشت سر هم پیدا کرد». کار مانند این است که الان به‌جای حل معادله  $Ax = b$  دستگاه معادله  $x^T A^T = b^T$  را با روش حذفی گاوس معمولی حل نموده‌ایم. این روش که امروزه به عنوان حذف گاوس شناخته می‌شود، تا اوایل قرن نوزدهم به‌خوبی شناخته نشد.

کاردان<sup>۱</sup>، پزشک بسیار حاذق و مشهور و ریاضی‌دان ایتالیایی قرن شانزدهم (۱۵۰۱-۱۵۷۶) در *Ars Magna* (۱۵۴۵)، اولین رساله را به زبان لاتین نوشت که صرفاً در باره جبر بود، قاعده‌ای برای حل یک دستگاه دو معادله خطی ارائه می‌دهد که او آن را *regula de modo* می‌نامد و در [۹] آن را مادر قوانین می‌نامد! این قانون اساساً قانون کرامر<sup>۲</sup> را برای حل یک دستگاه  $2 \times 2$  ارائه می‌دهد (گابریل کرامر ریاضی‌دان سوئیس سده هیجدهم)، اگرچه کاردان مرحله نهایی را انجام نمی‌دهد. بنابراین، کاردان به تعریف یک درمینان نمی‌رسد، اما، با آینده‌نگری، می‌بینیم که روش او به تعریف درمینان منتهی می‌شود.

### ۳ درمینان

ایده «درمینان» قبل از این‌که در اروپا ظاهر شود در ژاپن ظاهر شد. در سال ۱۶۸۳ سکی<sup>۳</sup> کتاب روش حل مسائل شبیه‌سازی شده را نوشت که شامل روش‌های ماتریسی است که دقیقاً مشابه با روش‌های چینیان است که در بخش قبل توضیح داده شده است و به صورت جداول نوشته شده است. سکی بدون داشتن کلمه‌ای که با «درمینان» مطابقت داشته باشد، درمینان‌ها را معرفی کرد و روش‌های کلی برای محاسبه آن‌ها را بر اساس مثال‌ها ارائه کرد. سکی با استفاده از درمینان‌های خود توانست درمینان ماتریس‌های  $2 \times 2$ ،  $3 \times 3$ ،  $4 \times 4$  و  $5 \times 5$  را بیابد و آن‌ها را برای حل معادلات به کار برد اما نه برای دستگاه‌های معادلات خطی.

<sup>1</sup>Girolamo Cardano

<sup>2</sup>Gabriel Cramer

<sup>3</sup>Seki

<sup>۴</sup> او در ماه مارس ۱۶۴۲ بدنیا آمد؛ یعنی همان سالی که نیوتن متولد شد و در دسامبر ۱۷۰۸ از دنیا رفت و قبل از برنولی اعداد برنولی را کشف کرد و به معرفی آن‌ها پرداخت و یک معادله درجه سوم را به شیوه‌ای حل نمود که هورنر ریاضی‌دان انگلیسی صد سال بعد همان شیوه را ارائه داد.

اولین ظهور یک عامل دترمینان در اروپا ده سال بعد بود. بسیار بعید به ذهن می‌رسد که ریاضی‌دانان اروپایی قرن هفدهم میلادی از کارهای این ریاضی‌دان ژاپنی کمترین اطلاعی داشته باشند. در سال ۱۶۹۳ لایب‌نیتس<sup>۱</sup> (ریاضی‌دان شهیر آلمانی که چهار سالی از نیوتن کوچکتر بود) به هوپیتال<sup>۲</sup> (ریاضیدان فرانسوی متولد سال ۱۶۶۱ که چهل و سه سال بیشتر زندگی نکرد و اولین کتاب درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را نوشت که از سخنرانی‌های استادش یوهان برنولی تشکیل شده بود) نامه نوشت. او توضیح داد که دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} 10 + 11x + 12y &= 0 \\ 20 + 21x + 22y &= 0 \\ 30 + 31x + 32y &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

راه حل دارد؛ چون

$$\begin{aligned} 10 \times 21 \times 32 + 11 \times 22 \times 30 + 12 \times 20 \times 31 &= \\ 10 \times 22 \times 31 + 11 \times 20 \times 32 + 12 \times 21 \times 30, & \end{aligned} \quad (2)$$

که اگر همه اعداد را به یک طرف تساوی منتقل نماییم این نتیجه حاصل می‌شود که ماتریس ضریب دارای دترمینان ۰ است. در دستگاه معادله خطی (۱) اگر فقط اعداد را مثل یک ماتریس  $3 \times 3$  در نظر بگیریم، عبارت (۲) را اگر به یک طرف منتقل نماییم، این عبارت دستور محاسبه دترمینان  $3 \times 3$  ساروس<sup>۳</sup> ریاضی‌دان فرانسوی قرن نوزدهم (۱۷۹۸-۱۸۶۱) است، که لایب‌نیتس قبل از او به این مطلب اشاره کرده است. توجه کنیم که در اینجا لایب‌نیتس از ضرایب عددی استفاده نمی‌کند بلکه منظور او از ۲۱ نشان دهنده  $a_{21}$  است. او در این مثال اعداد را به‌گونه‌ای نوشته است که هم در محاسبه عددی مقدار دترمینان را دهد و هم فرمول مورد نظرش را برآورده سازد. لایب‌نیتس این را به‌خوبی می‌دانست که علامت گذاری ریاضی مناسب، کلید پیشرفت است، بنابراین او نمادهای مختلفی برای نمایش ضرایب دستگاه‌های معادلات خطی آزمایش کرد. دست‌نوشته‌های منتشر نشده او حاوی بیش از ۵۰ روش مختلف برای نوشتن ضرایب دستگاه‌های معادلات خطی است که او در طی یک دوره ۵۰ ساله از سال ۱۶۷۸ روی آن‌ها کار کرد. لایب‌نیتس از کلمه «نتیجه»<sup>۴</sup> برای جمع ترکیبی معینی از عبارات یک دترمینان استفاده کرد. او نتایج مختلفی را در مورد «نتیجه‌ها» ثابت کرد، از جمله آن‌چه که اساساً قانون کرامر است. او هم‌چنین می‌دانست که یک دترمینان را می‌توان با استفاده از هر ستونی بسط داد، چیزی که اکنون بسط لاپلاس<sup>۵</sup> (ریاضی‌دان نامدار فرانسوی ۱۷۴۹-۱۸۲۷ و بنیان‌گذار نظریه احتمال) نامیده می‌شود. لایب‌نیتس علاوه بر مطالعه ضرایب دستگاه‌های معادلات خطی که او را به سمت دترمینان‌ها سوق داد، هم‌چنین ضرایب دستگاه‌های معادلات اشکال درجه دوم را مطالعه کرد که به طور طبیعی به نظریه ماتریس منتهی شد.

در سال ۱۷۳۰ ماکلوران<sup>۶</sup> ریاضی‌دان اسکاتلندی (۱۶۹۸-۱۷۴۶) رساله جبر خویش را نوشت و اگرچه تا دو سال بعد از وفاتش یعنی تا سال ۱۷۴۸ منتشر نشد. این کتاب شامل اولین نتایج منتشر شده در مورد عوامل دترمینان است که قانون کرامر را برای دستگاه‌های  $2 \times 2$  و  $3 \times 3$  اثبات می‌کند و نشان می‌دهد که مورد  $4 \times 4$  چگونه کار می‌کند [۸]. کرامر در ادامه توضیح می‌دهد که دقیقاً چگونه این عبارات را به عنوان حاصل ضرب ضرایب معین در معادلات محاسبه می‌کند و چگونه علامت را تعیین می‌کند. او هم‌چنین می‌گوید که چگونه می‌توان  $n$  عدد کسر را با جایگزین کردن ضرایب معینی در این محاسبه با عبارات ثابت دستگاه پیدا کرد [۹].

اکنون کار بر روی عوامل دترمینان به طور منظم ظاهر می‌شود. در سال ۱۷۶۴ بزو<sup>۷</sup> (۱۷۳۰ - ۱۷۸۳) روش‌هایی را برای محاسبه دترمینان‌ها ارائه داد، همان‌طور که واندرموند<sup>۸</sup> (۱۷۳۵ - ۱۷۹۶) در سال ۱۷۷۱ انجام داد. در سال ۱۷۷۲ لاپلاس ادعا کرد که روش‌های معرفی شده توسط کرامر و بزو غیرعملی است و در مقاله‌ای که در آن مدارهای سیارات درونی را مورد مطالعه قرار داد، در مورد حل دستگاه‌های سیارات بحث کرد. معادلات خطی بدون محاسبه واقعی آن، با استفاده از عوامل دترمینان. به‌طور شگفت‌انگیزی، لاپلاس از کلمه «نتیجه» برای چیزی که اکنون دترمینان می‌نامیم استفاده کرد: شگفت‌انگیز، زیرا این همان کلمه‌ای است که لایب‌نیتس به کار می‌برد، اما لاپلاس باید از کار لایب‌نیتس بی‌اطلاع بوده باشد. لاپلاس بسطی برای یک دترمینان ارائه داد که در حال حاضر به نام او نام‌گذاری شده است.

<sup>1</sup>Leibniz

<sup>2</sup>de l'Hôpital

<sup>3</sup>Pierre Frédéric Sarrus

<sup>4</sup>resultant

<sup>5</sup>Laplace

<sup>6</sup>Maclaurin

<sup>7</sup>Étienne Bézout

<sup>8</sup>Alexandre-Theophile Vandermonde

لاگرانژ<sup>۱</sup> (۱۷۳۶ - ۱۸۱۳) ریاضی‌دان بزرگی که در ایتالیا متولد شد و در پاریس از دنیا رفت، در مقاله‌ای در سال ۱۷۷۳، اتحادهایی را در حالت  $3 \times 3$  برای تابع دترمینان به دست آورد. اما این مطالب لاگرانژ با این‌که با نگاهی گذشته نوشته شده بود، ولی خود لاگرانژ هیچ ارتباطی بین کارش با کارهای لاپلاس و واندرموند<sup>۲</sup> (۱۷۳۵ - ۱۷۹۶) ندید. با این حال، این مقاله در سال ۱۷۷۳ در مورد مکانیک، حاوی چیزی است که ما اکنون به عنوان تفسیر حجمی دترمینان می‌گوئیم و برای اولین بار از طرف لاگرانژ مطرح شده است. لاگرانژ نشان داد که چهار وجهی تشکیل شده توسط  $O(0, 0, 0)$  و سه نقطه  $M(x, y, z)$ ،  $M'(x', y', z')$  و  $M''(x'', y'', z'')$  دارای حجم

$$\frac{1}{6}[z(x'y'' - y'x'') + z'(yx'' - xy'') + z''(xy' - yx')],$$

است. با کمی دقت معلوم است که مقدار فوق یک ششم دترمینان حاصل از مولفه‌های سه نقطه داده شده فوق است، اگر یکی از رئوس چهار وجهی را مبداء مختصات در نظر بگیریم.

چهار مقاله پایانی واندرموند نظریه دترمینان را مورد مطالعه قرار داد. مویر<sup>۳</sup> در [۵] ادعا می‌کند که واندرموند، تنها کسی که می‌تواند به عنوان بنیانگذار نظریه دترمینان در نظر گرفته شود. دلیل این ادعای قوی مویر این است که اگرچه ریاضیدانانی مانند لایبنیتس زودتر از واندرموند دترمینان را مطالعه کرده بودند، اما تمام کارهای قبلی به سادگی از دترمینان به‌عنوان ابزاری برای حل دستگاه معادلات خطی استفاده کرده بودند. واندرموند، دترمینان را به عنوان یک تابع در نظر گرفت و ویژگی‌های تابع دترمینان را ارائه کرد. او تأثیر تعویض دو سطر و یا تعویض دو ستون را مورد بررسی قرار داد. او از این نتیجه استنباط کرد که یک دترمینان با دو سطر یکسان یا دو ستون یکسان، برابر با صفر است. در نهایت او نماد بسیار هوشمندانه‌ای برای دترمینان‌ها ارائه کرد که متأسفانه اکنون باقی نمانده است. توماس مویر (۱۸۴۴ - ۱۹۳۴) یک اسکاتلندی بود که به عنوان سرپرست کل آموزش در آفریقای جنوبی ادامه داد و بیشتر به خاطر پنج جلد کتاب تاریخ دترمینان‌ها (که از سال ۱۹۰۶ تا سال ۱۹۲۳ و در مجموع با بیش از یک‌هزار صفحه منتشر کرد) شناخته شده است [۵]. کتاب او یک دایره‌المعارف جامع و کامل در مورد دترمینان از اواخر قرن هفدهم با کارهای لایبنیتس تا سال ۱۸۶۰ است، و به‌طور مفصل تاریخچه دترمینان را بر اساس سال و نام دانشمند و مطالب نوشته شده آن دانشمند، جمع‌آوری نموده است.

اصطلاح «دترمینان» اولین بار توسط شاهزاده ریاضی‌دانان به قول اریک تمپل بل<sup>۴</sup> یعنی گاوس<sup>۵</sup> (۱۷۷۷ - ۱۸۵۵) در سال ۱۸۰۱ در *Disquisitiones arithmeticae* معرفی شد در حالی که اشکال درجه دوم را مورد بحث قرار می‌داد. او این اصطلاح را به این دلیل به کار برد که دترمینان ویژگی‌های اشکال درجه دوم را تعیین می‌کند. با این حال مفهوم دترمینان او با مفهوم دترمینان امروزی ما یکسان نیست.

این کوشی<sup>۶</sup> ریاضی‌دان فرانسوی (۱۷۸۹ - ۱۸۵۷) بود که در سال ۱۸۱۲ از «دترمینان» به معنای امروزی آن استفاده کرد. کار کوشی کامل‌ترین کار در میان کارهای اولیه در مورد عوامل دترمینان است. ژاک اشتورم<sup>۷</sup> ریاضی‌دان سوئیسی (۱۸۰۳ - ۱۸۵۵) یک تعمیم از مسئله مقدار ویژه در زمینه حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل معمولی ارائه کرد. در واقع مفهوم مقدار ویژه ۸۰ سال قبل، دوباره در کار بر روی دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی، توسط دالامبر<sup>۸</sup> ریاضی‌دان دیگر فرانسوی (۱۷۱۷ - ۱۷۸۳) ظاهر شد که حرکت ریسمان با جرم‌های متصل به آن در نقاط مختلف را مطالعه می‌کرد.

باید تأکید کرد که نه کوشی و نه ژاک اشتورم به کلیت ایده‌هایی پی‌نبردند که معرفی می‌کردند و آنها را فقط در زمینه‌های خاصی می‌دیدند که در آن کار می‌کردند. ژاکوبی<sup>۹</sup> (۱۸۰۴ - ۱۸۵۱) از حدود سال ۱۸۳۰ و سپس کرونگر<sup>۱۰</sup> (۱۸۲۳ - ۱۸۹۱) که در لهستان بدنیا آمد و در آلمان از دنیا رفت و وایرشتراس<sup>۱۱</sup> (۱۸۱۵ - ۱۸۹۷) در دهه‌های ۱۸۵۰ و ۱۸۶۰ نیز به نتایج ماتریس نگاه کردند، اما دوباره در یک زمینه خاص، این بار مفهوم تبدیل خطی را ارائه کردند. ژاکوبی در سال ۱۸۴۱ سه رساله در مورد دترمینان‌ها منتشر کرد. این‌ها از این جهت مهم بودند که برای اولین بار تعریف دترمینان به روشی

<sup>1</sup> Joseph-Louis Lagrange

<sup>2</sup> Alexandre-Theophile Vandermonde

<sup>3</sup> Thomas Muir

<sup>4</sup> Eric Tempel Bell

<sup>5</sup> Carl Friedrich Gauss

<sup>6</sup> Augustin-Louis Cauchy

<sup>7</sup> Charles-François Sturm

<sup>8</sup> Jean d'Alembert

<sup>9</sup> Carl Jacobi

<sup>10</sup> Leopold Kronecker

<sup>11</sup> Karl Weierstrass

الگوریتمی ساخته شد و دترمینان به عنوان تابعی از درایه‌های خود تعریف شد. این سه مقاله توسط ژاکوبی ارائه شدند، ایده دترمینان را به طور گسترده‌ای منتشر کردند و باعث آشنایی هرچه بیشتر جامعه ریاضی دانان با دترمینان شدند. کیلی<sup>۱</sup> (۱۸۲۱ - ۱۸۹۵)، در سال ۱۸۴۱ مقاله‌ای نوشت و اولین مشارکت انگلیسی‌ها را در نظریه دترمینان‌ها منتشر کرد. در این مقاله او از دو خط عمودی در دو طرف آرایه برای نشان دادن دترمینان استفاده کرد، نمادی که اکنون استاندارد شده است. او بعداً در سال ۱۸۴۵ بسط دترمینان را بدون علامت منفی در نظر گرفت و آن را پرمینت نامید یعنی همانند بسط لاپلاس جملات دترمینان را بنویسیم و همه علامت‌های بسط را مثبت در نظر بگیریم [۱۱].

## ۴ ماتریس

اولین کسی که از اصطلاح «ماتریس» استفاده کرد، سیلوستر<sup>۲</sup> (۱۸۱۴ - ۱۸۹۷) در سال ۱۸۵۰ بود. سیلوستر ماتریس را به عنوان آرایش مستطیلی از درایه‌ها تعریف کرد و آن را چیزی دید که منجر به دترمینان‌های مختلف از آرایه‌های مربعی موجود در آن می‌شود. پس از ترک آمریکا و بازگشت به انگلستان در سال ۱۸۵۱، سیلوستر وکیل شد و با کیلی، که او نیز وکیل شده بود همکار و آشنا شد. جالب این است که کیلی هم علاقه‌اش به ریاضیات بود. سیلوستر کار مهمی بر روی نظریه ماتریس انجام داد، موضوعی که در طول پیاده‌روی با کیلی به آن علاقه‌مند شد. کیلی به سرعت اهمیت مفهوم ماتریس را دید و تا سال ۱۸۵۳ یادداشتی منتشر کرد که برای اولین بار وارون یک ماتریس را نشان می‌داد.

پنج سال بعد کیلی در سال ۱۸۵۸ کتاب خاطرات نظریه ماتریس را منتشر کرد که به دلیل داشتن اولین تعریف انتزاعی از ماتریس قابل توجه است. او نشان داد که آرایه‌های ضرابی که قبلاً برای اشکال درجه دوم و برای تبدیل‌های خطی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، موارد خاصی از مفهوم کلی او هستند. کیلی یک جبر ماتریسی ارائه داد که جمع، ضرب، ضرب اسکالر و وارون را تعریف می‌کند. او یک ساخت صریح از وارون یک ماتریس با استفاده از دترمینان ماتریس ارائه کرد. در این سال توسط جان زهفوس<sup>۳</sup> ضرب تانسوری تعریف شد، که بعداً به ضرب کرونکر معروف گردید [۱۰].

کیلی همچنین ثابت کرد که ماتریس‌های  $2 \times 2$ ، در معادله مشخصه خود صدق می‌کنند. او اظهار داشت که نتیجه را برای ماتریس‌های  $3 \times 3$  بررسی کرده است که نشان دهنده اثبات آن است، اما می‌گوید: در مورد کلی ماتریس با هر درجه، لازم نیست که اثبات رسمی قضیه را انجام دهم.

این‌که یک ماتریس معادله مشخصه خود صدق می‌کند، قضیه کیلی-هامیلتون نامیده می‌شود، بنابراین منطقی است که بپرسیم چه ارتباطی با هامیلتون دارد. در واقع او هم‌چنین یک مورد خاص از قضیه، در حالت  $4 \times 4$ ، در این دوره از تحقیقات خود را در با استفاده از چهارگانه‌های هامیلتون ثابت کرد.

در سال ۱۸۷۰ شکل متعارف جردن در رساله جایگزینی و معادلات جبری توسط جردن<sup>۴</sup> (۱۸۳۸ - ۱۹۲۲) ظاهر شد. در زمینه یک شکل متعارف برای جانشینی‌های خطی بر روی میدان محدود ظاهر می‌شود که مرتبه آنها اعداد اول باشد.

فروبنیوس<sup>۵</sup> (۱۸۴۹ - ۱۹۱۷)، در سال ۱۸۷۸، کار مهمی را در باره ماتریس‌ها نوشت که «جانشانی‌های خطی و فرم‌های دوخطی» نام داشت. اگرچه به نظر می‌رسید او از کار کیلی تا آن زمان بی‌اطلاع است. فروبنیوس در این مقاله به ضرایب اشکال می‌پردازد و از اصطلاح ماتریس استفاده نمی‌کند. با این حال او نتایج مهمی را در ماتریس‌های متعارف به عنوان نمایندگان کلاس‌های هم‌ارزی ماتریس‌ها ثابت کرد. او به کرونکر و ایرشتراس اشاره می‌کند که موارد خاصی از نتایج خود را به ترتیب در سال ۱۸۷۴ و ۱۸۶۸ در نظر گرفته‌اند. فروبنیوس همچنین این نتیجه کلی را ثابت کرد که یک ماتریس در معادله مشخصه خود صدق می‌کند. این مقاله ۱۸۷۸ توسط فروبنیوس همچنین حاوی تعریف رتبه یک ماتریس است که او در کار خود در مورد اشکال متعارف و تعریف ماتریس‌های متعامد استفاده کرد.

پوچی یک ماتریس مربعی توسط سیلوستر در سال ۱۸۸۴ تعریف شد. او پوچی  $A$  را با  $n(A)$  و آنرا بزرگترین عدد  $i$  تعریف کرد به طوری که هر کهاد ماتریس  $A$  از مرتبه  $n - i + 1$  صفر باشد. سیلوستر به پایایی ماتریس‌ها علاقه‌مند بود، یعنی ویژگی‌هایی را دنبال می‌کرد که با تبدیل‌های خاص تغییر نمی‌کنند. سیلوستر رابطه بسیار معروف زیر را ثابت کرد

$$\max\{n(A), n(B)\} \leq n(AB) \leq n(A) + n(B).$$

در سال ۱۸۹۶ فروبنیوس از خاطرات کیلی در سال ۱۸۵۸ در مورد نظریه ماتریس‌ها آگاه شد و پس از آن شروع به استفاده از اصطلاح ماتریس کرد. علیرغم این واقعیت که کیلی فقط قضیه کیلی-هامیلتون را برای ماتریس‌های  $2 \times 2$  و  $3 \times 3$

<sup>1</sup> Arthur Cayley

<sup>2</sup> James Joseph Sylvester

<sup>3</sup> Johann Georg Zehfus

<sup>4</sup> Camille Jordan

<sup>5</sup> Georg Frobenius



اثبات کرد، فروبنیوس سخاوت‌مندانه نتیجه را به کیلی نسبت داد، با این‌که فروبنیوس اولین کسی بود که قضیه را در حالت کلی اثبات کرد.

## ۵ ماتریس و دترمینان در ایران

در بخش مقدمه اشاره نمودم که بحث ماتریس‌ها شروعی ایرانی دارد و بعد از آن حتی در دوره درخشان تمدن اسلامی نیز خبر جدی از مباحث جبرخطی نداریم و ریاضی‌دانان دوره اسلامی چون مترجم و ادامه دهنده ریاضیات یونانیان بودند، تقریباً کار جدی در این دوره در مورد حل دستگاه‌های معادلات خطی به چشم نمی‌خورد، زیرا تمام آن ۴۰۰ ساله درخشان دوران یونانیان باستان بحث حل دستگاه‌های معادلات خطی به‌هیچ عنوان مورد نظر یونانیان نبوده است که حل دستگاه معادلات خطی یک کار تقریباً محاسباتی بوده و یونانیان دون شان خود می‌دانستند که به ریاضیات محاسباتی بپردازند و به آن لوژستیک می‌گفتند و الان نیز در ارتش لوژستیک را برای گروه پشتیبانی‌کننده مورد استفاده قرار می‌دهند و یک رده پائین‌تر محسوب می‌نمایند. اما در دوره قاجار در سال ۱۲۷۵ ق/ ۱۸۵۹ میلادی در روزگار امپراتوری ناپلئون سوم، فرّخ‌خان امین‌الملک (بعدها امین‌الدوله) سفیر ایران در پاریس مأمور اعزام محصلین ایرانی به فرنگ شد. فرّخ‌خان از ۴۲ نفر محصل اعزامی به فرنگ، ۹ نفر را از کاشان اعزام کرد که میرزا نظام‌الدین مهندس‌الممالک غفاری یکی از آنها بود. بنابراین وجود فرّخ‌خان که خود کاشانی بود علت اصلی اعزام کاشانی‌ها و از جمله نظام‌الدین به فرنگ بود. میرزا نظام‌الدین اهل روستای بُرْزآباد کاشان در زمان اعزام به فرانسه فقط ۱۵ سال داشت.



شکل ۱: نظام‌الدین غفاری اولین ایرانی که مقاله‌ای در باره دترمینان‌ها نوشت.

اوسه سال مقدمات را در مدرسه بندر دیپ تحصیل کرد و امتحان دانش‌آموختگی مقدماتی را در شهر روان داد و به پاریس رفت. او در پاریس علوم متوسطه را در مدرسه سن‌لویی فراگرفت و در امتحان آخر آن سال بالاترین نمره را در تمام دروس به‌دست آورد و پاداش این شاگرد اولی این بود که توانست بدون آزمون وارد مدرسه پلی‌تکنیک پاریس گردد. مدرسه پلی‌تکنیک پاریس یکی از مهمترین دانشگاه‌های علمی آن زمان بود و ورود به آن بسیار سخت بود و نکته تاریک تاریخ این مدرسه این است که اواربست‌گالوا که یکی از نابغه‌های عصر بود نتوانست از پس امتحان ورودی آن برآید (نابغه‌ای بزرگ که توسط ممتحنی متوسط به پایین رد شد! [۲]). میرزا نظام‌الدین در مدرسه پلی‌تکنیک به فراگیری ریاضیات پرداخت و در حوالی بیست سالگی توانست سه مقاله علمی در باره ریاضیات بنویسد که دومین آنها در باره محاسبه دترمینان است و ایشان اولین ایرانی است که اولاً اولین مقاله را سبک و سیاق جدید نوشته است و درثانی اولین ایرانی است که یک مقاله در باره دترمینان‌ها نوشته است که در شکل ۳ دو صفحه از صفحات مقاله او را در مجله دانشگاه خودش آورده‌ایم. او ۹ سال در فرانسه بود و بعد از این ۹ سال در سن ۲۴ سالگی به ایران مراجعت نمود و با ساخت جاده شوسه هراز در عرض سه سال لقب مهندس‌الممالک دریافت کرد. برای مطالعه زندگی او [۳] را ببینید.

## مراجع

[۱] ه. ایوز، آشنایی با تاریخ ریاضیات، ترجمه قاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، تهران (۱۳۶۵).



MM. Cornu et Picquet (de l'institution Sainte-Barbe).  
Ce théorème n'est qu'un cas particulier du suivant :

Soit

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

une fonction entière de degré  $n$  en  $x$ . Désignons par  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  les  $n$  racines de l'équation que l'on obtient en égalant à zéro cette fonction, et par  $f'(x)$  la dérivée de cette fonction par rapport à  $x$ ; on aura

$$R = (-1)^n \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix} = f(x) - x f'(x).$$

Solution. — R s'écrit en effet

$$R = \begin{vmatrix} -\alpha_1 & -x & -x & \dots & -x \\ -x & -\alpha_2 & -x & \dots & -x \\ -x & -x & -\alpha_3 & \dots & -x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x & -x & -x & \dots & -\alpha_n \end{vmatrix}.$$

Retranchons la dernière colonne de toutes les autres; on obtient

$$R = \begin{vmatrix} x - \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & -x \\ 0 & x - \alpha_2 & 0 & \dots & -x \\ 0 & 0 & x - \alpha_3 & \dots & -x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(x - \alpha_n) & -(x - \alpha_n) & -(x - \alpha_n) & \dots & -\alpha_n \end{vmatrix}.$$

Divisons la première colonne par  $x - \alpha_1$ , la deuxième par  $x - \alpha_2, \dots$ , la  $(n-1)^{ème}$  par  $(x - \alpha_{n-1})$ , la dernière par  $x$ , et divisons aussi la dernière ligne horizontale par

NOTE SUR LES CONES DU SECOND ORDRE;

PAR M. MIRZA-NIZAM.

I.

RELATIONS QUI EXPRIMENT QUE LE CÔNE A SOIT TROIS PLANS TANGENTS, SOIT TROIS GÉNÉRATRICES RECTANGULAIRES.

L'équation générale des cônes du second degré dont le sommet est  $(x_1, y_1, z_1)$  peut s'écrire de la manière suivante :

$$A(x-x_1)^2 + A'(y-y_1)^2 + A''(z-z_1)^2 + 2B(y-y_1)(z-z_1) + 2B'(x-x_1)(z-z_1) + 2B''(x-x_1)(y-y_1) = 0.$$

Les équations d'une génératrice sont de la forme

$$\frac{x-x_1}{\alpha} = \frac{y-y_1}{\beta} = \frac{z-z_1}{\gamma},$$

$\alpha, \beta, \gamma$  étant les cosinus des angles que fait cette droite avec les trois axes supposés rectangulaires. Cette droite devant se trouver sur le cône, on doit avoir

$$(1) \quad A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + 2B\beta\gamma + 2B'\alpha\gamma + 2B''\alpha\beta = 0.$$

En exprimant que deux autres droites  $(\alpha', \beta', \gamma')$ ,  $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$  se trouvent sur le cône, on obtient deux autres relations qui ne diffèrent de la précédente que parce que  $\alpha, \beta, \gamma$  sont successivement remplacés par  $\alpha', \beta', \gamma'$  et  $\alpha'', \beta'', \gamma''$ . Ajoutant ensuite ces trois relations, en ayant égard aux six relations

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1, & \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0, \\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, & \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = 0, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, & \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0, \end{cases}$$

شکل ۲: مقاله دوم نظام الدین غفاری که در باره دترمینانها بود

[۲] ا. ت. بل، ریاضی دانان نامی، ترجمه حسن صفاری، انتشارات امیرکبیر، چاپ پنجم

[۳] س. م. سادات بیدگلی، ا. شریفزاده، روزنامه خاطرات مهندس الممالک غفاری، دو فصلنامه علمی کاشان شناسی، بهار و تابستان ۱۳۹۸، شماره ۱۴ (پیاپی ۲۲)، صفحات: ۱۱۵-۱۴۲.

[4] I. Grattan-Guinness. W. Ledermann, Matrix theory, in I Grattan-Guinness (ed.), Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences (London, 1994), 775-786.

[5] T. Muir, History of determinants, Dover Publication, Volume 3 (1920).

[6] N. Japikse, Johan de Witt (Amsterdam, 1915).

[7] Fischer, Gerd, Analytische Geometrie (in German) (4th ed)(1985) Wiesbaden: Vieweg. p. 145.

[8] J. V. Grabiner, Was Newton's calculus a dead end? The continental influence of Maclaurin's treatise of fluxions, Amer. Math. Monthly 104 (5) (1997), 393-410.

[9] E. Knobloch, From Gauss to Weierstrass: determinant theory and its historical evaluations, in The intersection of history and mathematics (Basel, 1994), 51-66.

[10] J. G. Zehfuss, Ueber eine gewisse Determinante, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 3 (1858) 298-301

[11] A. Cayley, On the theory of linear transformations, Cambridge mathematical Journal, Vol 5, (1845), 193-209.

[12] T. W. Hawkins, Cauchy and the spectral theory of matrices, Historia Mathematica 2 (1975), 1-29.

[13] K. R. Biermann, Biography in Dictionary of Scientific Biography (New York 1970-1990).

[14] Mirza-Nizam, Théorème sur les déterminants, Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 4 (1865), 500-504.



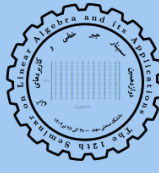
دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران

دوازدهمین سمینار بین المللی

جبر خطی

و کاربردهای آن

۲۷ الی ۲۸ تیرماه ۱۴۰۲



Sahand University of Technology, Tabriz, Iran

The 12th International Seminar on

Linear Algebra

and its Applications

July 18 - 19, 2023



## یک روش تقریبی برای محاسبه ماتریس انتقال حالت

فاطمه شایان فرد<sup>۱</sup> \* و علیرضا شفیعی<sup>۲</sup>  
گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران  
<sup>۲</sup>دانشکده مکانیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران

### چکیده

حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی در تحلیل بسیاری از مسائل مهندسی کاربرد دارد. در این تحقیق ابتدا ماتریس انتقال حالت برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی همگن و روش محاسبه آن بیان شده است، سپس یک روش تقریبی برای محاسبه این ماتریس ارائه شده و با ارائه یک مثال کارائی آن بررسی می شود.

واژه‌های کلیدی: دستگاه معادلات دیفرانسیل، ماتریس انتقال حالت  
کد موضوع بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 65Z05, 65Fxx

### ۱ مقدمه

تحلیل جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X \quad (1)$$

که در آن  $X_{n \times 1}$  ماتریس مجهولات و  $A_{n \times n}$  ماتریس ضرایب است در بسیاری از مسائل مهندسی مانند کنترل و سیستمهای دینامیکی کاربرد دارد [۱]. برای حل این معادلات روش های تحلیلی و عددی مختلفی وجود دارد [۲، ۳]. یکی از این روش ها استفاده از ماتریس انتقال حالت<sup>۱</sup> است. طبق تعریف ماتریس انتقال حالت برای معادله (۱) ماتریسی مانند  $\Phi(t, t_0)$  است که در رابطه

$$X(t) = \Phi(t, t_0)X(t_0) \quad (2)$$

قضیه ۱.۱. ماتریس انتقال حالت برای معادله (۱) به صورت

$$\Phi(t, t_0) = \exp\left(\int_{t_0}^t A(\tau)d\tau\right) \quad (3)$$

قابل بیان است [۴].

ویژگی اصلی ماتریس انتقال حالت را در قضیه زیر می توان دید.

قضیه ۲.۱. اگر  $\Phi$  یک ماتریس انتقال حالت باشد آنگاه برای هر  $t_1 \in [t_0, t_2]$  داریم

$$\Phi(t_0, t_1)\Phi(t_1, t_2) = \Phi(t_0, t_2) \quad (4)$$

[۴].

اگر ماتریس ضرایب  $A(t)$  قطری شدنی باشد، به راحتی می توان با محاسبه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه این ماتریس، ماتریس انتقال حالت را محاسبه کرد. اما اگر  $A(t)$  قابل قطری شدن نباشد، محاسبه ماتریس انتقال حالت دشوار خواهد بود. در این تحقیق روشی ارائه می شود که به کمک آن ماتریس انتقال حالت به طور عددی قابل محاسبه است.

\* سخنران. آدرس ایمیل: fshayanfard@pnu.ac.ir

<sup>1</sup>State transition matrix

## ۲ روش تقریبی محاسبه ماتریس انتقال حالت

دستگاه معادلات (۱) را در نظر بگیرید. با توجه به آن دنباله زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= I \\ \Phi_1 &= I + \int_{t_0}^t A(\tau)\Phi_0(\tau)d\tau \\ &\vdots \\ \Phi_{k+1} &= I + \int_{t_0}^t A(\tau)\Phi_k(\tau)d\tau\end{aligned}$$

اگر  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Phi_k - \Phi\|_\infty = 0$  باشد آنگاه دنباله  $\{\Phi_k\}$  همگراست و داریم:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k = \Phi \quad (۵)$$

اکنون ماتریس انتقال حالت را به صورت زیر تقریب می‌زنیم:

ابتدا فاصله  $[t_0, t]$  را به  $n$  زیرفاصله  $[t_{k-1}, t_k]$ ،  $k = 1, \dots, n$  تقسیم می‌کنیم که  $t_n = t$ . فرض کنید که

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}, \quad \tau_k \in (t_{k-1}, t_k) \quad (۶)$$

باشد، با توجه به ویژگی‌های ماتریس انتقال حالت داریم:

$$\Phi(t, t_0) = \Phi(t_n, t_0) = \Phi(t_n, t_{n-1})\Phi(t_{n-1}, t_{n-2})\dots\Phi(t_1, t_0) \quad (۷)$$

که در آن

$$\Phi(t_k, t_{k-1}) = \exp(A(\tau_k)\Delta t_k), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (۸)$$

با توجه به بسط تیلور تابع نمایی و صرف نظر از  $\Delta t_k$  های مرتبه دوم و بالاتر خواهیم داشت:

$$\Phi(t_k, t_{k-1}) \simeq I + A(\tau_k)\Delta t_k \quad (۹)$$

با جایگذاری مقدار تقریبی (۹) در (۸) به تقریب

$$\Phi(t, t_0) \simeq (I + A(\tau_n)\Delta t_n)(I + A(\tau_{n-1})\Delta t_{n-1})\dots(I + A(\tau_1)\Delta t_1) \quad (۱۰)$$

خواهیم رسید.

## ۳ نتایج عددی

در این بخش روش را با ارائه دو مثال مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

مثال ۱۰۳. فرض کنید ماتریس ضرایب در معادله (۱) به صورت

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (۱۱)$$

باشد این ماتریس دارای مقدار ویژه مکرر ۲ و بردار ویژه  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  بوده و بنابراین نمی‌توان ماتریس را قطری کرد. به کمک فرم جردن، ماتریس انتقال حالت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -e^{2t}(t-1) & -te^{2t} \\ te^{2t} & e^{2t}(t+1) \end{pmatrix} \quad (۱۲)$$

بنابراین در  $t = 1$  خواهیم داشت:

$$\Phi(1) = \begin{pmatrix} \circ & -e^2 \\ e^2 & 2e^2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \circ & -73891 \\ 73891 & 147781 \end{pmatrix} \quad (13)$$

اکنون به کمک روش پیشنهاد شده و تقسیم فاصله  $[0, 1]$  به  $100$  قسمت مساوی ( $\Delta t = 0.01$ ) خواهیم داشت:

$$\Phi(1) = (I + A \times 0.01) \dots (I + A \times 0.01) = (I + A \times 0.01)^{100} \quad (14)$$

و بنابراین

$$\Phi(1) = \begin{pmatrix} 0.1421 & -71026 \\ 71026 & 143472 \end{pmatrix} \quad (15)$$

و اگر تعداد تقسیمات بازه را به هزار برسانیم

$$\Phi(1) = \begin{pmatrix} 0.0015 & -73861 \\ 73861 & 147737 \end{pmatrix} \quad (16)$$

و چنانچه ملاحظه می شود ماتریس  $\Phi(1)$  با دقت خوبی تقریب زده می شود.

مثال ۲.۳. در این مثال ماتریس ضرایب رابادرایه های غیرثابت به صورت زیر در نظر می گیریم

$$A = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t & \circ \\ \cos t & \sin t & \circ \\ \circ & \circ & 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

با استفاده از فرم جردن ماتریس انتقال حالت به شکل

$$\Phi(t) = e^{sint} \begin{pmatrix} \cosh(\cos t) & \sinh(\cos t) & \circ \\ \sinh(\cos t) & \cosh(\cos t) & \circ \\ \circ & \circ & e^{1-\sin t} \end{pmatrix} \quad (18)$$

خواهد بود و بنابراین

$$\Phi(1) = e^{\sin 1} \begin{pmatrix} \cosh(\cos 1) & \sinh(\cos 1) & \circ \\ \sinh(\cos 1) & \cosh(\cos 1) & \circ \\ \circ & \circ & e^{1-\sin 1} \end{pmatrix} \quad (19)$$

در نتیجه

$$\Phi(1) = \begin{pmatrix} 2.6666 & 1.3153 & \circ \\ 1.3153 & 2.6666 & \circ \\ \circ & \circ & 2.7183 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

حال با در نظر گرفتن  $\Delta t = 0.01$  و استفاده از روش پیشنهادی خواهیم داشت

$$\Phi(1) = \begin{pmatrix} 2.1678 & 1.4817 & \circ \\ 1.4817 & 2.1678 & \circ \\ \circ & \circ & 2.7048 \end{pmatrix} \quad (21)$$

و اگر  $\Delta t = 0.001$  در نظر گرفته شود، آن گاه

$$\Phi(1) = \begin{pmatrix} 2.1780 & 1.3153 & \circ \\ 1.3153 & 2.1780 & \circ \\ \circ & \circ & 2.7189 \end{pmatrix} \quad (22)$$

خواهد بود. چنانچه ملاحظه می شود افزایش تعداد تقسیم بندی بازه منجر به تقریب بهتری از جواب شد. اما در برخی از درایه ها نیاز به تقریب بهتری داریم که در این مورد می توان روش را با در نظر گرفتن جملات بیشتری از بسط تیلور بهبود بخشید.

## ۴ نتیجه‌گیری

در این تحقیق یک روش تقریبی برای محاسبه ماتریس انتقال حالت، با استفاده از دو جمله از بسط تیلور تابع نمایی، ارائه شد. نتایج عددی تطابق نسبتاً خوبی با نتایج تحلیلی دارند. با افزایش تعداد جملات بسط تیلور مورد استفاده (بعنوان مثال استفاده از سه یا چهار جمله از بسط تیلور) می‌توان دقت نتایج حاصل را افزایش داد که این موضوع در مقالات آتی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

## مراجع

- [1] R. H. Bishop, R. C. Dorf, *Modern control systems*, Pearson, 2022.
- [2] W. Boyce, H. Diprima, *Elementary differential equations and boundary value problems*, Wiley, 2001.
- [3] J. A. Trangenstein, *Scientific computing*, vol. III, Springer, 2017.
- [4] J. R. Brannan, W. Boyce, M. A. Mckibben *Differential equations*, Wiley, 2015.

## جایابی ساختار ویژه: ابزاری موثر از جبرخطی جهت تشخیص عیب

محمدجواد خسروجردی \*

گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی سهند، شهر جدید سهند، تبریز

### چکیده

واقعیت این است که جبرخطی به عنوان ابزاری موثر و کارآمد جهت آنالیز و طراحی سیستم‌های کنترل پیشرفته از جایگاه برجسته‌ای در نظریه سیستم‌ها برخوردار است. طبیعی است که پیچیدگی روزافزون سیستم‌های کنترل، وقوع عیوب مختلف در اجزای آنها را امری اجتناب ناپذیر می‌کند و لذا تشخیص به موقع این عیوب ضرورتی حیاتی محسوب می‌شود. در این مقاله رویکرد جایابی ساختار ویژه شامل مقادیر ویژه و بردارهای ویژه به عنوان ابزاری موثر از جبرخطی جهت تشخیص عیب تشریح شده و نشان داده می‌شود که چگونه می‌توان با استفاده از این رویکرد ساختاریافته، سیستمی دینامیکی موسوم به مولد مانده طراحی نمود به طوری که سیگنال مانده کاملاً تحت تاثیر و حساس به عیب باشد و از ورودیهای معلوم و ناشناخته کاملاً مجزا شود و بدین ترتیب از تشخیص اشتباه عیب و وقوع فاجعه جلوگیری گردد.

واژه‌های کلیدی: سیستم کنترل، مقدار ویژه، بردار ویژه

کد موضوع بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 93C15, 93B53, 93B70

### ۱ مقدمه

امروزه با پیچیده‌تر شدن سیستم‌های کنترل پیشرفته، واحد تشخیص عیب به عنوان بخش مهم و حیاتی هر سیستم کنترل محسوب می‌شود. وظیفه اصلی واحد تشخیص عیب آشکارسازی زمان و محل وقوع عیب است. وقوع عیب در اجزای اصلی سیستم‌های کنترل شامل عملگرها و سنسورها امری اجتناب ناپذیر است و می‌تواند باعث افت چشمگیر کارایی سیستم و حتی بروز ناپایداری و وقوع فاجعه جبران ناپذیر شود. لذا باید رخداد عیب به موقع و در کمترین زمان ممکن و بدون اشتباه تشخیص داده شود تا راهکاری مناسب جهت برطرف کردن و جبران سازی آن اعمال گردد، به عنوان مثال می‌توان با تشخیص وقوع عیب در اجزای سیستم آن را خاموش نمود تا قطعه معیوب تعمیر یا تعویض شود [۱].

با مطرح شدن ایده متغیر حالت و بردار حالت در فضای برداری  $\mathbb{R}^n$  همراه با توصیف ریاضی مدل فضای حالت سیستم‌ها در اوایل دهه ۶۰ میلادی، نظریه سیستم‌های کنترل پیشرفته مبتنی بر جبرخطی رشد و توسعه چشمگیری یافت بطوریکه یک دهه بعد یعنی در اوایل دهه هفتاد میلادی بستر مناسبی برای ارائه روشهای تشخیص عیب مبتنی بر مدل فراهم گردید و زمینه پژوهشی فعالی را در مهندسی کنترل ایجاد نمود [۲]. در بین این روشها، کاربرد ابزارهای جبرخطی با توجه به امکان خطی سازی سیستم‌های غیرخطی حول نقاط کار مورد نظر از محبوبیت بسزایی برخوردار است و بیشتر در کانون توجه پژوهشگران قرار گرفته‌اند [۱، ۶]. شایان ذکر است که با وجود بسط و توسعه روشهای تشخیص عیب مبتنی بر داده در سالهای اخیر، همچنان جبرخطی جایگاه خود را به عنوان ابزاری موثر و مفید جهت طراحی الگوریتم‌های عیب یابی حفظ نموده است [۶]. ایده اصلی این روشهای تشخیص عیب مبتنی بر مدل، طراحی سیستمی دینامیکی موسوم به مولد مانده است که با تولید سیگنالی موسوم به مانده که باید حداکثر حساسیت را به عیب داشته باشد، امکان اطلاع از رخداد عیب میسر می‌شود، دقیقاً مشابه آلام یا هشدارهایی که امروزه در اکثر وسایل الکترونیکی صنعتی و خانگی و خودروها جهت افزایش ایمنی و انجام تعمیرات و سرویس لازم تعبیه شده‌اند. چالش اصلی برای طراحی واحد مولد مانده وجود ورودیهای ناشناخته نظیر اغتشاش و نویز است که در عمل باعث می‌شوند که حتی وقتی سیستم سالم است و عیبی رخ نداده است سیگنال مانده یا همان سیگنال هشدار

\* سخنران. آدرس ایمیل: khosrowjerdi@sut.ac.ir

بطور غیرمنتظره فعال شود و اخطار اشتباهی تولید شود. لذا مقاوم سازی سیگنال مانده نسبت به ورودیهای ناشناخته در دستور کار پژوهشگران قرار گرفته است و روشهای متنوعی با بکارگیری ابزارهای ریاضی مختلف ارائه شده‌اند. حاصل این پژوهش ها را می‌توان زیرعنوان روشهای مقاوم تشخیص عیب مبتنی بر مدل طبقه بندی نمود [۱، ۶]. در این مقاله با هدف نشان دادن کارایی جبرخطی در حل مسایل و چالش‌های مهندسی کنترل، روش جایابی ساختار ویژه که همان جایابی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه می‌باشند به اختصار معرفی شده و نشان داده می‌شود که چگونه می‌توان در یک روال منطقی و ساختاریافته از مفاهیم بنیادین جبرخطی جهت مجزاسازی کامل سیگنال مانده از ورودی های ناشناخته استفاده نمود [۵، ۶]. ویژگی شاخص رویکرد جایابی ساختار ویژه سهولت و ساختاریافته بودن آن است بطوریکه امکان اجرای آن توسط نرم‌افزارهای علمی و مهندسی موجود نظیر MATLAB یا SCILAB به سهولت امکان پذیر است. علاوه براین، کاربرد روش جایابی ساختار ویژه جهت تشخیص عیب عملگر فرآیند چهارتانگ بر مبنای مدل ریاضی فضای حالتی که در [۳، ۴] ارائه شده است، نشان داده می‌شود.

## ۲ تشخیص عیب با جایابی ساختار ویژه

جهت تشریح روش جایابی ساختار ویژه ابتدا مدل ریاضی یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان را در حضور عیب و ورودی ناشناخته به صورت معادلات فضای حالت زیر در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 u + B_2 v + B_3 f, & x(0) &= x_0. \\ y &= Cx + D_1 u + D_2 v + D_3 f \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $v \in \mathbb{R}^q$ ,  $f \in \mathbb{R}^l$  به ترتیب بردار حالت، بردار ورودی کنترل معلوم، بردار خروجیهای اندازه‌گیری شده، بردار ورودی های ناشناخته و بردار عیب شامل عیوب اجزا، محرک و سنسورها می‌باشند. در اینجا ورودی ناشناخته شامل اغتشاش، نویز و سایر نامعینی‌های سیستم است و هیچ اطلاعاتی از ماهیت ریاضی آن در دسترس نیست. ضمناً، فرض می‌شود برای یک سیستم سالم  $f = 0$  و برای یک سیستم معیوب  $f \neq 0$  است، بطوریکه زمان وقوع عیب  $f$  و تابع ریاضی آن نیز کاملاً نامعلوم است. هدف از حل مساله تشخیص عیب، طراحی سیستمی دینامیکی موسوم به مولد مانده است که با پردازش اطلاعات ورودی معلوم  $u$  و خروجی اندازه‌گیری شده  $y$ ، سیگنالی به نام مانده  $r$  تولید کند که کاملاً به عیب  $f$  وابسته و حساس باشد و از ورودی معلوم  $u$  و ورودی ناشناخته  $v$  کاملاً مجزا یا اصطلاحاً دکوپله شود. طبیعی است با تضمین این فرضیات مجزاسازی، می‌توان با پردازش سیگنال مانده  $r$  با اطمینان کامل از وقوع عیب  $f$  در سیستم مورد نظر آگاهی یافت و تمهیدی برای برطرف کردن آن اندیشید. در حقیقت، مانده  $r$  همان سیگنال هشدار است. در ادامه بدون اینکه به کلیت بحث لطمه ای وارد شود، فرض می‌شود در مدل فضای حالت (۱)  $D_2 = 0$  است. [۵]. یکی از ساختارهای شناخته شده و استاندارد جهت طراحی مولد مانده مبتنی بر رویکرد است و به صورت زیر توصیف می‌شود

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1 u + K(y - \hat{y}), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0. \quad (2)$$

$$\hat{y} = C\hat{x} + D_1 u \quad (3)$$

$$r = Q(y - \hat{y}) \quad (4)$$

که در آن  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  تخمین بردار حالت و  $K \in \mathbb{R}^{n \times p}$  و  $Q \in \mathbb{R}^{g \times p}$  به ترتیب ماتریس های بهره و وزنی هستند که باید به نحوه مناسبی توسط طراح تعیین شوند. علاوه براین،  $r \in \mathbb{R}^g$  بردار مانده است. با تعریف خطای تخمین حالت به صورت  $e = x - \hat{x}$  و انجام عملیات جبری سراسر، دینامیک خطای تخمین به صورت زیر بدست می‌آید

$$\dot{e} = A_c e + B_2 v + (B_3 - K D_3) f, \quad e(0) = x_0 - \hat{x}_0. \quad (5)$$

$$r = H e + Q D_3 f \quad (6)$$

که در آن  $A_c = A - KC$  و  $H = QC$ . فرض کنید بهره ماتریسی  $K$  به گونه‌ای انتخاب می‌شود که تمام مقادیر ویژه ماتریس  $A_c$  اکیدا در نیمه چپ صفحه مختلط (LHP) باشند یا به عبارت دیگر، ماتریس  $A_c$  پایدار باشد. با فرض رویت پذیربودن زوج  $(A, C)$ ، تضمین می‌شود که این بهره پایدارساز  $K$  وجود دارد [۱]. با گرفتن تبدیل لاپلاس از دینامیک خطا در (۵)، رابطه زیر برای مانده  $r$  بدست می‌آید

$$r = G_f(s)f + G_v(s)v \quad (7)$$

که در آن

$$G_f(s) = H(sI - A_c)^{-1}(B_\Psi - KD_\Psi) + QD_\Psi \quad (۸)$$

$$G_v(s) = H(sI - A_c)^{-1}B_\Psi \quad (۹)$$

طبق رابطه (۷)، عیب  $f$  و ورودی ناشناخته  $v$  هر دو روی مانده  $r$  تاثیر می‌گذارند ولی خوشبختانه مانده  $r$  نسبت به ورودی کنترل معلوم  $u$  کاملاً مجزا شده است. طبیعی است شرط مجزاسازی کامل  $r$  از  $v$  باید به صورت  $G_v(s) = 0$  تضمین شود یا بطور معادل

$$H(sI - A_c)^{-1}B_\Psi = 0 \quad (۱۰)$$

برای برقراری شرط مجزاسازی (۱۰)، از روش جایابی ساختار ویژه که شامل جایابی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه در جبرخطی است، استفاده می‌شود [۵، ۶]. برای این منظور، فرض کنید ماتریس  $A_c$  به تعداد  $n$  تا مقدار ویژه متمایز حقیقی  $\lambda_i$  در نیمه چپ صفحه مختلط (LHP) دارد و در نتیجه متناظر با این مقادیر ویژه متمایز،  $n$  تا بردار ویژه راست  $v_i$  و  $n$  تا بردار ویژه چپ  $l_j^T$  وجود دارد بطوریکه

$$l_i^T A_c = \lambda_i l_i^T, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (۱۱)$$

$$A_c v_j = \lambda_j v_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (۱۲)$$

که در آن  $v_i, l_j \in \mathbb{R}^n$ . یک نتیجه شناخته شده در جبرخطی ارتباط زیر را بین بردارهای راست و چپ اثبات می‌کند که

$$l_i^T v_j = 0, \quad \forall i \neq j. \quad (۱۳)$$

علاوه براین، فرض کنید بردارهای ویژه چپ و راست به نحوه مناسبی مقیاس بندی شده باشند بطوریکه

$$l_i^T v_i = 1, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (۱۴)$$

در این صورت، می‌توان بسط یک ماتریس تابع تبدیل را برحسب ساختار ویژه به صورت زیر اثبات نمود [۶]

$$(sI - A_c)^{-1} = \frac{v_1 l_1^T}{s - \lambda_1} + \frac{v_2 l_2^T}{s - \lambda_2} + \dots + \frac{v_n l_n^T}{s - \lambda_n} \quad (۱۵)$$

با جایگذاری بسط (۱۵) در شرط مجزاسازی (۱۰) نتیجه می‌شود

$$G_v(s) = H(sI - A_c)^{-1}B_\Psi = \sum_{i=1}^n \frac{H v_i l_i^T B_\Psi}{s - \lambda_i} = 0 \quad (۱۶)$$

لذا شرط مجزاسازی (۱۰) برقرار است اگر و فقط اگر

$$R_i = H v_i l_i^T B_\Psi = 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (۱۷)$$

با فرض وجود شرط مجزاسازی و برقرار رابطه (۱۷) و با استفاده از خاصیت تعامد و مقیاس‌بندی بردارهای ویژه چپ و راست به ترتیب در (۱۳) و (۱۴)، شرط لازم زیر بدست می‌آید

$$\sum_{i=1}^n R_i = H \left( \sum_{i=1}^n v_i l_i^T \right) B_\Psi = H B_\Psi = Q C B_\Psi = 0 \quad (۱۸)$$

لذا با فرض برآورده‌سازی شرط مجزاسازی (۱۰)، ماتریس  $Q$  باید جواب معادله زیر باشد

$$H B_\Psi = Q C B_\Psi = 0 \quad (۱۹)$$



بدیهی است در صورتیکه  $CB_2 = 0$  باشد، هر ماتریس وزنی  $Q$  در معادله (۱۹) صدق می‌کند. اما این فرض همیشه برقرار نیست. در حالت کلی، جواب معادله (۱۹) با رابطه زیر داده می‌شود

$$Q = Q_1 [I_p - CB_2(CB_2)^\dagger] \quad (20)$$

که در آن  $Q_1 \in \mathbb{R}^{g \times p}$  ماتریس دلخواهی است که توسط طراح انتخاب می‌شود.  $(CB_2)^\dagger$  معکوس مجازی چپ  $CB_2$  است و در صورتیکه رتبه  $CB_2$  برابر تعداد ورودیهای ناشناخته یعنی  $q$  باشد، معکوس مجازی وجود دارد و از رابطه زیر بدست می‌آید

$$(CB_2)^\dagger = [(CB_2)^T(CB_2)]^{-1}(CB_2)^T. \quad (21)$$

دقت کنید با تحلیل وجود جواب برای معادله (۱۹)، می‌توان نشان داد که بعد بردار مانده  $r \in \mathbb{R}^g$  با رابطه زیر انتخاب می‌شود

$$g = p - \text{rank}(CB_2) \leq p \quad (22)$$

که در اینجا منظور از  $\text{rank}$  همان رتبه ماتریس است. بدین ترتیب، روشی جهت تعیین ماتریس وزنی  $Q$  بدست می‌آید. لذا باید روشی برای محاسبه بهره ماتریسی  $K$  نیز ارائه نمود. برای این منظور فرض کنید علاوه بر برقراری معادله (۱۹)، بهره  $K$  به گونه‌ای انتخاب شود که سطرهای ماتریس  $H$  بردارهای ویژه چپ ماتریس  $A_c$  متناظر با هر مقدار ویژه  $\lambda_i$  در نیمه چپ صفحه مختلط (LHP) باشند. در این صورت

$$H = \begin{pmatrix} l_1^T \\ l_2^T \\ \vdots \\ l_g^T \end{pmatrix} \quad (23)$$

و در نتیجه با استناد به شرط (۱۹) می‌توان نتیجه گرفت که

$$HB_2 = 0 \Rightarrow l_i^T B_2 = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, g \quad (24)$$

که در آن بردارهای ویژه چپ  $A_c$  به ازای  $i = 1, 2, \dots, n$ . با استفاده از شرط تعامد بردارهای ویژه چپ و راست می‌توان نوشت

$$Hv_i = 0, \quad \forall i = g+1, g+2, \dots, n \quad (25)$$

که  $v_i$  به ازای  $i = 1, 2, \dots, n$  بردارهای ویژه راست ماتریس  $A_c$  هستند. در این صورت می‌توان با استفاده از روابط (۲۴) و (۲۵) و انجام عملیات جبری سراسر نشان داد که

$$G_v(s) = H(sI - A_c)^{-1}B_2 = H \sum_{i=1}^n \frac{v_i l_i^T}{s - \lambda_i} B_2 \quad (26)$$

$$= \sum_{i=1}^g \frac{(Hv_i)(l_i^T B_2)}{s - \lambda_i} + \sum_{i=g+1}^n \frac{(Hv_i)(l_i^T B_2)}{s - \lambda_i} \quad (27)$$

$$= \sum_{i=1}^g \frac{(Hv_i)(l_i^T B_2)}{s - \lambda_i} = 0 \quad (28)$$

لذا شرط مجزاسازی (۱۰) تضمین می‌شود. نتایج فوق جهت طراحی مولد مانده با جایابی ساختار ویژه چپ را می‌توان در قالب قضیه زیر خلاصه نمود:

قضیه ۱۰.۲. سیستم (۱) و مولد مانده (۲) را در نظر بگیرید. شرط مجزاسازی (۱۰) تضمین می‌شود اگر

۱. ماتریس وزنی  $Q$  جواب معادله زیر باشد

$$HB_{\gamma} = QCB_{\gamma} = 0 \quad (29)$$

۲. بهره  $K$  به گونه‌ای تعیین شود که تمام سطرهای ماتریس  $H = QC$  بردارهای ویژه چپ  $A_c = A - KC$  متناظر با هر مقدار ویژه دلخواه  $\lambda_i$  در نیمه چپ صفحه مختلط (LHP) باشد.

در اینجا بد نیست بطور خلاصه اشاره‌ای به روش حل مساله جایابی ساختار ویژه چپ شود. شایان ذکر است که با استفاده از نرم افزارهای مهندسی موجود نظیر MATLAB یا SCILAB اجرای الگوریتم جایابی ساختار ویژه کار دشواری نیست. فرض کنید  $l_i^T$  به ازای  $i = 1, 2, \dots, g$  که طبق قضیه فوق سطرهای ماتریس  $H$  هستند، بردارهای ویژه چپ  $A_c$  متناظر با مقادیر ویژه انتخابی  $\lambda_i$  در نیمه چپ صفحه مختلط (LHP) باشند. در این صورت

$$l_i^T A_c = \lambda_i l_i^T \Rightarrow l_i^T (A - KC) = \lambda_i l_i^T, \quad \forall i = 1, 2, \dots, g \quad (30)$$

به عبارت دیگر، از رابطه (۳۰) نتیجه می‌شود

$$l_i = (\lambda_i I - A)^{-1} C^T w_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, g \quad (31)$$

که در آن

$$w_i = -K^T l_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, g \quad (32)$$

بدین ترتیب  $g$  بردار ویژه چپ تعیین می‌شوند. حال کافی است  $n - g$  بردار ویژه چپ بطور دلخواه به گونه‌ای انتخاب شوند که با بردارهای ویژه قبلی مستقل خطی باشند و در روابط زیر صدق کنند

$$l_i = (\lambda_i I - A)^{-1} C^T w_i, \quad \forall i = g + 1, g + 2, \dots, n \quad (33)$$

و

$$w_i = -K^T l_i, \quad \forall i = g + 1, g + 2, \dots, n \quad (34)$$

بعد از محاسبه بردارهای  $w_i$  و  $l_i$ ، با تعریف ماتریس‌های

$$W = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_g \quad w_{g+1} \quad \dots \quad w_n], \quad L = [l_1 \quad \dots \quad l_g \quad l_{g+1} \quad \dots \quad l_n] \quad (35)$$

می‌توان نشان داد که بهره ماتریسی  $K$  از رابطه زیر بدست می‌آید

$$K = -[WL^{-1}]^T \quad (36)$$

بطریقه مشابه می‌توان قضیه زیر را در مورد طراحی مولد مانده با استفاده از جایابی ساختار ویژه راست نیز بیان نمود [۵].

قضیه ۲.۲. سیستم (۱) و مولد مانده (۲) را در نظر بگیرید. شرط مجزاسازی (۱۰) تضمین می‌شود اگر

۱. ماتریس وزنی  $Q$  جواب معادله زیر باشد

$$HB_{\gamma} = QCB_{\gamma} = 0 \quad (37)$$

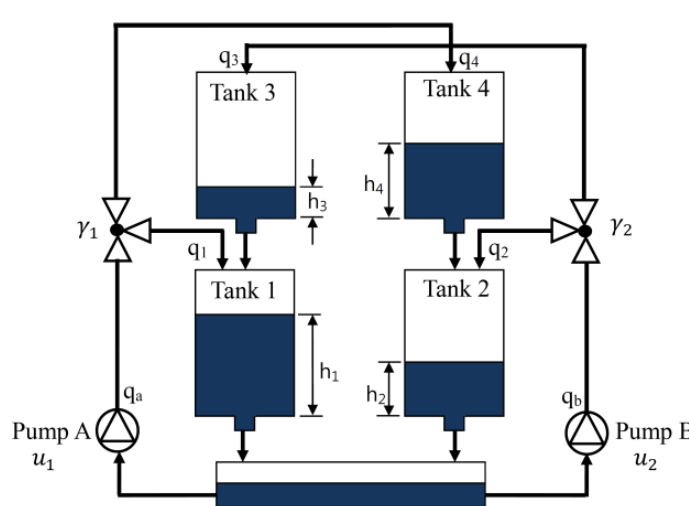
۲. بهره  $K$  به گونه‌ای تعیین شود که تمام ستونهای ماتریس  $B_{\gamma}$  بردارهای ویژه راست  $A_c = A - KC$  متناظر با هر مقدار ویژه دلخواه  $\lambda_i$  در نیمه چپ صفحه مختلط (LHP) باشد.

### ۳ یک مثال عملی: تشخیص عیب عملگر در فرآیند چهار تانک

شکل ۱ شمای فیزیکی فرآیند چهار تانک را نشان می دهد. این فرآیند چند ورودی- چند خروجی از چهار تانک که بهم ارتباط دارند، تشکیل شده است و هدف اصلی کنترل ارتفاع آب در دو تانک ۱ و ۲ است. دو پمپ به عنوان عملگرهای فرآیند چهار تانک وظیفه اعمال ورودی های کنترل را برعهده دارند. دو تانک ۳ و ۴ نیز حکم ورودی های اغتشاش را دارند که ارتفاع آب در تانک های ۱ و ۲ را تحت تاثیر قرار می دهند. این فرآیند یک سیستم دینامیکی غیرخطی است که مدل فضای حالت غیرخطی آن با استفاده از قانون بقای جرم در [۲] ارایه شده است. با خطی سازی مدل غیرخطی حول یک نقطه کار مطلوب، می توان مدل فضای حالت خطی شده فرآیند چهار تانک را مطابق (۱) بدست آورد. با استفاده از روش خطی سازی ژاکوبی، ماتریس های فضای حالت مدل خطی شده فرآیند چهار تانک حول یک نقطه کار مطلوب به صورت زیر بدست می آید [۴]:

$$A = \begin{pmatrix} -0.159 & 0 & 0.419 & 0 \\ 0 & -0.111 & 0 & 0.333 \\ 0 & 0 & 0.419 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.333 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0.833 & 0 \\ 0 & 0.718 \\ 0 & 0.479 \\ 0.357 & 0 \end{pmatrix} \quad (38)$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.357 & 0 \\ 0 & -0.313 \end{pmatrix}, B_3 = B_1, C = 0.5I_4, D_1 = D_2 = D_3 = 0 \quad (39)$$



شکل ۱: فرآیند چهار تانک

در اینجا، هدف حل مساله تشخیص عیب عملگرهای فرآیند چهار تانک است. با توجه به اینکه تعداد خروجی های اندازه گیری شده این فرآیند  $p = 4$  است لذا بعد بردار سیگنال مانده با استفاده از رابطه (۱۰) برابر با  $g = 2$  بدست می آید. ماتریس وزنی  $Q$  نیز از رابطه (۲۰) به صورت زیر محاسبه می شود

$$Q = Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

با انتخاب مقادیر ویژه دلخواه  $\lambda_i$  در  $-1, -2, -3, -4$  ماتریس های  $L$  و  $W$  از رابطه (۲۵) به صورت زیر بدست می آیند

$$L = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} -0.9841 & 0 & -0.837 & 0 \\ 0 & -1.9889 & 0 & -0.687 \\ 0 & 0 & -6.837 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7.9333 \end{pmatrix} \quad (41)$$

در این صورت، بهره ماتریسی  $K$  از رابطه (۳۶) محاسبه می‌شود

$$K = \begin{pmatrix} ۱۹۶۸۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳۹۷۷۹ & ۰ & ۰ \\ ۰٫۰۸۳۷ & ۰ & ۶٫۰۸۳۷ & ۰ \\ ۰ & ۰٫۰۶۶۷ & ۰ & ۷۹۳۳۳ \end{pmatrix} \quad (۴۲)$$

بدین ترتیب، با محاسبه ماتریس‌های  $K$  و  $Q$  مراحل طراحی مولد مانده در (۲) تکمیل می‌شود. بدیهی است با جایابی ساختار ویژه متفاوت می‌توان عملکرد مولد مانده را به نحوه مطلوب تنظیم نمود. شایان ذکر است که مطابق تمام روشهای تشخیص عیب مبتنی بر مدل که در سالهای اخیر ارائه شده‌اند، مولد مانده طراحی شده با روش جایابی ساختار ویژه براساس مدل خطی شده فرآیند چهار تانک در همسایگی نقطه کار مورد نظر عملکرد قابل قبولی خواهد داشت، مخصوصا اگر شرایط اولیه مولد مانده  $\hat{x}(0)$  در (۲) را نزدیک نقطه کار مورد نظر انتخاب نمود تا تقریب خطی سیستم غیرخطی از اعتبار بیشتری برخوردار باشد.

#### ۴ نتیجه‌گیری

در بین روشهای متنوع تشخیص عیب مبتنی بر مدل ریاضی فضای حالت که در سالهای اخیر ارائه شده‌اند، روش جایابی ساختار ویژه نمونه موفقیت آمیزی از کاربردهای گسترده جبرخطی در تشخیص عیب سیستم‌ها محسوب می‌شود. در این روش ساختاریافته با استفاده از مفاهیم اساسی جبرخطی نظیر مقدار ویژه و بردار ویژه می‌توان مولد مانده مقاومی طراحی نمود که سیگنال مانده آن کاملا حساس به عیب باشد و از ورودی‌های معلوم و ناشناخته کاملا مجزا شود و بدین ترتیب از بروز هشدارهای اشتباه در مورد بروز عیب جلوگیری نمود. شایان ذکر است که با وجود روشهای خطی‌سازی دقیق و تقریبی، زمینه برای کاربرد ابزارهای جبرخطی جهت ارائه روشهای تشخیص عیب مقاوم برای سیستم‌های غیرخطی کاملا فراهم می‌باشد.

#### مراجع

- [۱] م. ج. خسروجردی، روش‌های تشخیص و جبران سازی عیب در سیستم‌های کنترل، دانشگاه صنعتی سهند، ۱۳۹۵.
- [۲] م. ج. خسروجردی، نادر صفری شاد، تحلیل و طراحی سیستم‌های کنترل پیشرفته، دانشگاه صنعتی سهند، ۱۳۸۹.
- [3] K. H. Johansson, The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero, *Transaction on Control System Technology*, 8 (2000), No. 3, 456-465.
- [4] M. J. Khosrowjerdi, N. Safari-shad and R. Nikoukhah, Fault detection in a mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  setting, *Transaction on Automatic Control*, 50 (2005), No. 7, 1063-1068.
- [5] R. J. Patton and J. Chen, On eigenstructure assignment for robust fault diagnosis, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 10 (2000), 1191-1208.
- [6] R. J. Patton and J. Chen, *Robust Model-based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*, Kluwer Academic Publishers, USA, 1999.



دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران

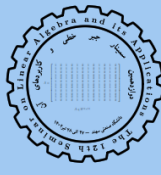
دوازدهمین سمینار بین المللی

جبر خطی

و کاربردهای آن



۲۷ الی ۲۸ تیرماه ۱۴۰۲



Sahand University of Technology, Tabriz, Iran

The 12th International Seminar on

Linear Algebra

and its Applications

July 18 - 19, 2023



دانشگاه صنعتی سهند

## یافتن جواب بهینه دستگاه معادلات غیر خطی با روش بهینه سازی کپک مخاطی

فاطمه توانگر مروستی<sup>۱</sup>، سید ابوالفضل شاهزاده فاضلی<sup>۲</sup> و سعیده برخوردار فیروز آبادی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup>کارشناسی ارشد علوم کامپیوتر، دانشگاه یزد

<sup>۲</sup>عضو هیات علمی، بخش علوم کامپیوتر، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد

<sup>۳</sup>دانشجوی دکتری علوم کامپیوتر، دانشگاه یزد

### چکیده

تاکنون به منظور حل دستگاه معادلات غیر خطی روش‌های مختلفی ارائه شده است. اما یافتن بهترین جواب از نظر دقت و زمان محاسبه مورد نظر متخصصین آنالیز عددی بوده است. در این رابطه، یکی از این راه حل‌ها، استفاده از روش‌ها یا الگوریتم‌های فرا ابتکاری برای بهینه سازی است. در این مقاله سعی بر این است تا با استفاده از روش بهینه سازی کپک مخاطی، برای دستگاه معادلات غیر خطی، بهترین جواب ممکن را به دست آوریم. این بهینه‌ساز با الهام از رفتار هوشمندانه یک موجود تک سلولی بنام کپک مخاطی و بر اساس حالت رفتار نوسانی این موجودات در طبیعت ارائه شده است، در ادامه به منظور توسعه الگوریتم بهینه‌سازی کپک مخاطی مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین این روش برای حل دستگاه معادلات غیر خطی پیاده سازی شده است و نتایج آزمایشات صورت گرفته حاکی از کارایی موثر این روش در یافتن جواب بهینه دستگاه معادلات غیر خطی است.

واژه‌های کلیدی: الگوریتم کپک مخاطی، بهینه‌سازی، دستگاه معادلات غیر خطی، روش‌های فراابتکاری

کد موضوع بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 68T20, 65F10, 78M50

### ۱ مقدمه

در اغلب سیستم‌ها و کنترل با دستگاه معادلات غیر خطی مواجه می‌شویم. روش‌های تکراری برای حل این گونه دستگاه‌ها ارائه شده است، اما همیشه جوابگو نیستند و افزایش محاسبات و حافظه بیش از حد کامپیوتر را موجب می‌گردند. مسئله‌ی مورد نظر حل دستگاه معادلات غیر خطی  $F(X) = b$  است. برای این منظور تقریب مناسبی از  $X$  توسط روش‌های ابتکاری و فراابتکاری به دست می‌آید. بررسی‌ها نشان داده است که این روش برای حل دستگاه معادلات غیر خطی  $F(X) = b$  مناسب است. لازم به ذکر است این روش در حل دستگاه معادلات خطی استاندارد نیز قابل استفاده است. هدف پژوهش حاضر حل دستگاه غیر خطی به فرم  $F(X) = b$  است که با استفاده از الگوریتم بهینه سازی کپک مخاطی روش جدیدی ارائه می‌گردد. با توجه به تاثیر چشمگیر الگوریتم‌های بهینه سازی بر کاهش تعداد گام‌های همگرایی به جواب، برای حل سریع‌تر دستگاه غیرخطی مورد نظر اقدام می‌گردد.

### ۲ روش بهینه‌سازی کپک مخاطی

بهینه‌ساز کپک مخاطی<sup>۱</sup> (SMA) یکی از روش‌های فرا-ابتکاری است که در سال ۲۰۲۰ معرفی شده است. این روش یک بهینه‌ساز قدرتمند مبتنی بر جمعیت است که با الهام از رفتار هوشمندانه یک موجود تک سلولی بنام کپک مخاطی و بر

\*سخنران- آدرس ایمیل: fazeli@yazd.ac.ir

<sup>1</sup>Slim Mould

اساس حالت رفتار نوسانی این موجودات در طبیعت ارائه شده است. موجودات تک سلولی در این کپک، قادر هستند تا با استفاده از روش‌های هوشمندانه‌ای مسیرهای پر پیچ و خم را طی کنند تا بتوانند راه خود را به مقصدشان پیدا کنند. به دلیل این‌که الگوریتم کپک مخاطی عملکردی رقابتی و اغلب برتر در مقایسه با الگوریتم‌های مختلف را ارائه می‌دهد، اخیراً مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است [۱، ۲]. در ادامه، مراحل الگوریتم SMA شرح داده شده است.

### الگوریتم SMA

ورودی: جمعیت اولیه و حداکثر تعداد تکرار  
خروجی: بهترین موقعیت و تابع مقصد

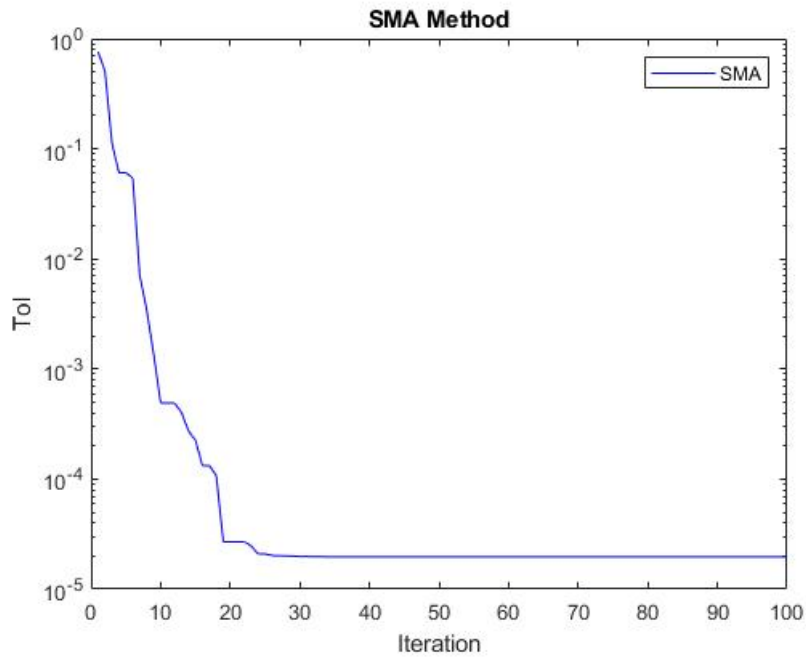
۱. مقداردهی اولیه: بهترین موقعیت‌ها و تابع مقصد را برابر صفر قرار دهید، سپس مقدار تابع برازندگی را برابر بی‌نهایت و موقعیت کپک‌ها را به طور تصادفی مقداردهی کنید.
۲. تا زمانی که به حداکثر تکرار نرسیده‌اید مراحل زیر را تکرار کنید: بررسی کنید که موقعیت‌ها خارج از فضای جستجو نباشد. چنانچه جوابی این شرایط را نداشت آن را در محدوده فضای جستجو قرار دهد.
۳. تابع برازندگی موقعیت کپک‌ها که در مرحله قبل مقداردهی شده است را محاسبه کنید.
۴. مقادیر توابع برازندگی به دست آمده از مرحله قبل را مرتب‌سازی کنید.
۵. وزن توابع برازندگی به دست آمده را محاسبه کنید.
۶. بهترین مقدار تابع برازندگی کمتر از مقدار تابع مقصد را مقایسه کنید  
چنانچه بهترین مقدار تابع برازندگی کمتر از مقدار تابع مقصد باشد، مقدار تابع مقصد را برابر با بهترین مقدار تابع برازندگی قرار دهید.
۷. برای جلوگیری از گیر افتادن در بهینه محلی، موقعیت کپک‌ها را با استفاده از یک عدد تصادفی به‌روز کنید.
۸. در صورتی که شرط پایان برآورده شود، الگوریتم خاتمه می‌یابد. در غیر این صورت، برای تکرار بعدی به مرحله ۳ بروید.
۹. پایان

## ۳ آزمایشات عددی

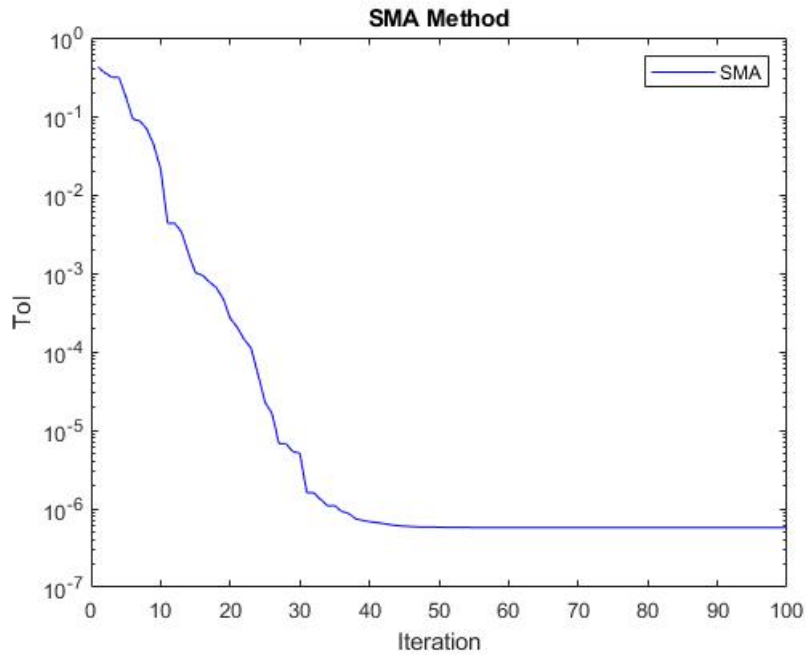
الگوریتم SMA برای یافتن جواب بهینه دستگاه‌های غیرخطی که در بالا بدان اشاره گردیده، با نرم افزار MATLAB پیاده سازی شده است. در ادامه از دستگاه‌های غیرخطی متعددی برای بررسی روند همگرایی این الگوریتم استفاده شده است. در ادامه دودستگاه غیرخطی نشان داده شده است که در مثال‌ها، بردارهای  $b$  به‌طور تصادفی و به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند تا دستگاه‌ها دارای جواب باشند. شکل ۱ مربوط به یک دستگاه غیرخطی  $۲*۲$  (۱) و شکل ۲ مربوط به دستگاه غیر خطی  $۳*۳$  (۲) می‌باشد و هر یک روند همگرایی جواب بهینه حاصل از الگوریتم را برای رسیدن به جواب دستگاه  $F(X) = b$  نشان می‌دهند.

$$\begin{aligned} x_1^5 + x_2^4 - 1 &= -0.2505 \\ 2x_1 - 4x_2^2 &= -2.6073 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x_1^6 + 4x_2^5 + x_3^4 - 10 &= -9.4420 \\ 5x_1^3 - 4x_1x_2 - x_3 &= -0.2944 \\ x_1 + 6x_2^2 - x_3 &= 0.1301 \end{aligned} \quad (2)$$



شکل ۱: روند همگرایی الگوریتم برای دستگاه غیرخطی (۱)



شکل ۲: روند همگرایی الگوریتم برای دستگاه غیرخطی (۲)

#### ۴ نتیجه گیری

در این مقاله الگوریتم *SMA* برای یافتن جواب بهینه دستگاه غیر خطی ارائه شده است. این روش برخلاف روش‌های تکراری دیگر هیچ محدودیتی از جمله انتخاب جواب تقریبی اولیه ندارد. الگوریتم *SMA* روشی ساده برای به دست آوردن جواب بهینه این گونه دستگاه‌ها است. همانطور که در مثال‌ها نشان داده شده است، روند همگرایی کارایی الگوریتم را مشخص می‌کند. همچنین این الگوریتم برای دستگاه‌های خطی با ماتریس ضرایب غیر مربعی نیز قابل استفاده است.

## مراجع

- [1] Li. Shimin, H. Chen, M. Wang, A.A. Heidari and a. Mirjalili. "Slime mould algorithm: A new method for stochastic optimization." *Future Generation Computer Systems*, vol. 111, pp. 300-323, Oct. 2020.
- [2] E.H. Houssein , M.A. Mahdy , D. Shebl , A. Manzoor , R. Sarkar and W.M. Mohamed. "An efficient slime mould algorithm for solving multi-objective optimization problems." *Expert Syst Appl.* 2022;187(1):115870. doi: 10.1016/j.eswa.2021.115870.





دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران

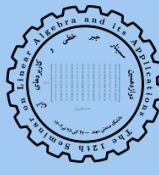
دوازدهمین سمینار بین المللی

جبر خطی

و کاربردهای آن



۲۷ الی ۲۸ تیرماه ۱۴۰۲



Sahand University of Technology, Tabriz, Iran

The 12th International Seminar on

Linear Algebra

and its Applications

July 18 - 19, 2023



## آنالیز همگرایی و پایداری یک روش عددی با مرتبه دقت بالا برای مسأله نفوذ کسری

رقیه طالبی اربطانی و مجتبی حاجی پور \*

گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی سهند، شهر جدید سهند، تبریز

### چکیده

در این مقاله، یک روش عددی با مرتبه دقت بالا برای حل یک مسأله نفوذ کسری-زمانی طراحی و پیاده‌سازی شده است. این مسأله حاوی یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی است که دارای یک مشتق کسری-زمانی در مفهوم کاپوتوی از مرتبه  $\alpha$  که  $0 < \alpha < 1$  و یک مشتق صحیح مرتبه دوم مکانی می‌باشد. برای ساختن این روش عددی، از یک فرمول تفاضلات متناهی فشرده برای گسسته‌سازی مکانی و از یک فرمول گراندول-لنینیکوف وزن‌دار انتقال‌یافته برای گسسته‌سازی زمانی استفاده شده است. همچنین حل‌پذیری، پایداری و همگرایی از مرتبه چهار نسبت به مکان و سه نسبت به زمان برای روش پیشنهادی جهت حل مسأله نفوذ کسری بررسی شده است. به منظور نشان دادن کارایی و دقت همگرایی بالای این روش، چند مثال عددی ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: معادله نفوذ کسری، مرتبه دقت بالا، روش تفاضلات متناهی فشرده، پایداری و همگرایی  
 کد موضوع بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 26A33, 65N06

### ۱ مقدمه

امروزه معادلات دیفرانسیل حاوی مشتقات کسری کاربردهای گسترده‌ای در زمینه‌های مختلف از جمله ریاضیات اقتصادی، دینامیک اقیانوس، دینامیک اتمسفر و ریاضیات بیولوژیک پیدا کرده است. توصیف برخی از فرآیندهای فیزیکی با کمک معادلات دیفرانسیل کسری منجر به پیشرفت چشمگیر حساب کسری در دهه‌های اخیر شده است. یکی از تفسیرهای فیزیکی مشتق کسری، اثر حافظه است. به عبارتی دیگر به دلیل ساختار غیرموضعی مشتق کسری مدل‌سازی پدیده‌هایی که حافظه می‌باشند توسط این مشتقات به مراتب خیلی بهتر از مشتقات معمولی رفتار پدیده را بازتاب می‌دهد [۱]. یکی از فرآیندهای مهم فیزیکی، فرآیندهای جابه‌جایی، انتشار و نفوذ از قبیل فرآیند پخش شدن آلودگی در اقیانوس، فرآیند قدم زنی تصادفی و حرکت جریان الکتریکی یا گرمایی در رساناها است. در حقیقت، معادله نفوذ کسری از تعویض مشتقات مرتبه صحیح زمانی و یا مکانی (فضایی) با مشتقات مرتبه کسری موجود در معادله نفوذ به دست آید. معادله دیفرانسیل نفوذ حاوی جملاتی با مشتقات کسری-زمانی در مدل‌سازی فرآیندهایی مانند فرآیندهای انتقال در محیط‌های ناهمگن، انتشار پروتئین در محدوده سلولی و سیالات آشوبی و پلاسماها مورد استفاده قرار می‌گیرد [۲]. یک فرم کلی از مسأله نفوذ کسری-زمانی به صورت زیر است

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha u(x, t) = \kappa_\alpha \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x, t), & (x, t) \in (a, b) \times (0, T], \\ u(x, 0) = 0, & x \in (a, b), \\ u(a, t) = \beta(t), \quad u(b, t) = \gamma(t), & t \in [0, T], \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, & x \in (a, b), \\ u(a, t) = \beta(t), \quad u(b, t) = \gamma(t), & t \in [0, T], \end{cases} \quad (2)$$

$$u(a, t) = \beta(t), \quad u(b, t) = \gamma(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

که  $\kappa_\alpha$  ثابت نفوذ است و  ${}^C D_t^\alpha u(x, t)$  نشان‌دهنده مشتق کسری-زمانی در مفهوم کاپوتوی مرتبه  $\alpha$  از تابع  $u(x, t)$  است و به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}^C D_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial u(x, \xi)}{\partial \xi} (t-\xi)^{-\alpha} d\xi, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (4)$$

\* سخنران. آدرس ایمیل: hajipour@sut.ac.ir

بعلاوه  $\gamma(t)$ ,  $\beta(t)$  و  $f(x, t)$  توابعی هموار مشخصی هستند که  $\beta(0) = 0$  و  $\gamma(0) = 0$ . معادله نفوذ کسری (۱) بیانگر یک فرآیند نفوذ نامنظم است و اگر  $0 < \alpha < 1$ ، آن‌گاه مسأله نفوذ کسری (۱) را یک فرآیند زیرنفوذ (زیرانتشار) گویند و در حالتی که  $\alpha = 1$  باشد، این مسأله به معادله نفوذ کلاسیک تبدیل می‌شود و برای  $\alpha > 1$  یک فرآیند ابرنفوذ (ابرانتشار) را مدل‌سازی می‌کند. همچنین کمیت  ${}^C D_t^\alpha u$  را گاهی سرعت نفوذ (انتشار) می‌نامند. هر چقدر  $\alpha$  به صفر نزدیک‌تر باشد سرعت انتشار پایین‌تر و هر چقدر  $\alpha$  به یک و عددی بزرگ‌تر از یک نزدیک‌تر باشد، سرعت انتشار بیشتر است. از نقطه نظر فیزیکی مشتق کسری کاپوتوی مرتبه  $\alpha$ ، در زمان  $t$  از همه اطلاعات مشتق کلاسیک  $f'(s)$  برای  $s \in (0, t)$  استفاده می‌کند که این خاصیت را اثر حافظه می‌نامند. به عبارت دیگر فرض کنید  $f(t)$  نشان دهنده یک فرآیند دینامیکی متغیر با زمان باشد در این صورت برای  $s < t$  وضعیت فیزیکی  $f(s)$  به گذشته فرآیند فیزیکی وابسته است. بنابراین می‌توان از مشتقات کسری در پیش‌بینی رفتار و کسب آگاهی از فرایندهای فیزیکی استفاده کرد. بنابراین یافتن جواب برای مدل‌های ریاضی حاوی یک معادله نفوذ کسری از اهمیت ویژه‌ای در علوم مهندسی و فیزیک دارد. در چند دهه‌ی اخیر، حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری مورد توجه محققان زیادی قرار گرفته است. اما با توجه به اینکه جواب تحلیل این نوع معادلات به راحتی در دسترس نیست و حتی در برخی موارد یافتن جواب آن‌ها امکان‌پذیر نیست، مهندسان و ریاضی‌دانان به‌طور چشمگیری از روش‌های عددی همچون تفاضلات متناهی، روش‌های طیفی و عناصر محدود برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری بهره می‌برند [۴، ۵].

در این مقاله به منظور ساختن یک روش با نرخ همگرایی بالا از یک روش تفاضلات متناهی فشرده برای گسسته‌سازی نسبت به  $x$  و از یک فرمول تفاضلاتی گرانوالد-لتنیکوف انتقال‌یافته وزن‌دار تعمیم‌یافته برای گسسته‌سازی نسبت به  $t$  استفاده خواهیم نمود. همچنین نشان می‌دهیم که روش طراحی شده به ازای همه  $\alpha \in (0, 1)$  حل‌پذیر، پایدار و همگراست. به منظور تأیید نتایج تئوری برخی مثال‌های عددی را برای حل مسأله نفوذ کسری-زمانی ارائه می‌کنیم.

## ۲ فرمول تقریبی مبتنی بر عملگر گرانوالد-لتنیکوف انتقال‌یافته وزن‌دار

در این بخش، ابتدا تعاریف مشتقات کسری مرتبه-متغیر در مفهوم ریمان-لیوویل و کاپوتو را بیان می‌کنیم [۱].

**تعریف ۱.۲.** فرض کنید  $0 < \alpha < 1$ ، مشتق کسری چپ ریمان-لیوویل مرتبه  $\alpha$  از تابع  $u(x, t)$  به صورت

$${}^{\text{RL}}D_t^\alpha u(x, t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(x, \xi)}{(t-\xi)^\alpha} d\xi, \quad (5)$$

تعریف می‌شود که در آن  $\Gamma(\cdot)$  نشان دهنده تابع گاما است. با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء، برای بین مشتق کسری کاپوتو و ریمان-لیوویل مرتبه  $\alpha$  داریم [۵]

$${}^{\text{RL}}D_t^\alpha (u(x, t) - u(x, 0)) = {}^C D_t^\alpha u(x, t). \quad (6)$$

**تعریف ۲.۲.** متناظر با مشتق کسری مرتبه متغیر ریمان-لیوویل مرتبه  $\alpha$ ، عملگر دیفرانسیلی گرانوالد-لتنیکوف انتقال‌یافته را به صورت زیر تعریف می‌شود [۵]

$$\Lambda_{\tau, p}^\alpha u(x, t) := \frac{1}{\tau^\alpha} \sum_{k=0}^{[\frac{t}{\tau}] + p} g_k^{(\alpha)} u(x, t - (k-p)\tau), \quad (7)$$

که در آن  $p$  یک عدد صحیح،  $g_k^{(\alpha)} := (-1)^k \binom{\alpha}{k}$  و  $\tau$  طول گام زمانی می‌باشد. به راحتی دیده می‌شود که ضرایب  $g_k^{(\alpha)}$  ضرایب سری توانی  $(1-z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(\alpha)} z^k$  می‌باشند و با کمک فرمول زیر نیز محاسبه می‌شوند

$$g_k^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha+1}{k}\right) g_{k-1}^{(\alpha)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

که در آن  $g_0^{(\alpha)} = 1$ . عملگر (۷) دارای نرخ همگرایی یک در هر نقطه‌ی  $t$  است. می‌توان نشان داد که اگر  $0 < \alpha < 1$ ، آن‌گاه ویژگی‌های زیر برای ضرایب  $g_k^{(\alpha)}$  برقرار است [۴]

$$\begin{aligned} (1) \quad & g_0^{(\alpha)} = 1, \quad g_1^{(\alpha)} = -\alpha, \quad g_k^{(\alpha)} < 0, \quad k \geq 2, \\ (2) \quad & -\sum_{k=1}^n g_k^{(\alpha)} < 1, \quad \forall n \geq 1, \\ (3) \quad & \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(\alpha)} = 0. \end{aligned}$$

در ادامه یک عملگر گرانوالد-لتنیکوف انتقال یافته وزن دار که برای تقریب با مرتبه سه از مشتق کسری ریمان-لیوویل از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است را بیان می‌کنیم.

تعریف ۳.۲. عملگر گرانوالد-لتنیکوف انتقال یافته وزن دار متناظر با مشتق کسری ریمان-لیوویل مرتبه  $\alpha$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$${}^{\text{RL}}_0 \mathcal{D}_t^\alpha u(x, t) := \frac{1}{\tau^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor} w_k^{(\alpha)} u(x, t - k\tau), \quad (9)$$

که در آن ضرایب  $w_k^{(\alpha)}$  به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$\begin{cases} w_0^{(\alpha)} = \rho_1 g_0^{(\alpha)}, \\ w_1^{(\alpha)} = \rho_1 g_1^{(\alpha)} + \rho_2 g_0^{(\alpha)}, \\ w_k^{(\alpha)} = \rho_1 g_k^{(\alpha)} + \rho_2 g_{k-1}^{(\alpha)} + \rho_3 g_{k-2}^{(\alpha)}, \quad 2 \leq k \leq N, \end{cases} \quad (10)$$

و وزن‌های  $\rho_3, \rho_2, \rho_1$  به صورت زیر هستند

$$\rho_1 = 1 + \frac{17}{24}\alpha + \frac{\alpha^2}{8}, \quad \rho_2 = -\frac{11}{12}\alpha - \frac{\alpha^2}{4}, \quad \rho_3 = \frac{5}{24}\alpha + \frac{\alpha^2}{8}. \quad (11)$$

عملگر (۹) دارای نرخ همگرایی ۳ در نقطه‌ی  $t_n = n\tau$  که  $2 \leq n \leq N$  است. همچنین می‌توان خواص زیر را برای دنباله ضرایب  $\{w_k^{(\alpha)}\}$  نشان داد. فرض کنید  $0 < \alpha < 1$ ، در آن صورت خواص زیر برای دنباله ضرایب  $\{w_k^{(\alpha)}\}$  برقرار است:

$$\begin{aligned} (1) \quad & w_0^{(\alpha)} > 0, \quad w_1^{(\alpha)} < 0, \quad w_2^{(\alpha)} > 0, \quad w_k^{(\alpha)} < 0, \quad k \geq 3, \\ (2) \quad & -\sum_{k=1}^n w_k^{(\alpha)} < w_0^{(\alpha)} + w_2^{(\alpha)}, \quad \forall n \geq 1, \\ (3) \quad & \sum_{k=0}^{\infty} w_k^{(\alpha)} = 0. \end{aligned}$$

### ۳ گسسته‌سازی مسأله نفوذ کسری-زمانی

فرض کنید  $M$  و  $N$  اعداد صحیح مثبتی باشند؛ یک شبکه یکنواخت از نقاط به صورت

$$\Omega_{\tau, h} = \{(x_i, t_n) \mid x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N, \}, \quad (12)$$

برای مجموعه  $\Omega = [a, b] \times [0, T]$  در نظر بگیرید که  $h = \frac{b-a}{M}$  و  $\tau = \frac{T}{N}$  به ترتیب طول گام‌های زمانی و مکانی هستند. به علاوه فرض کنید  $u_i^n$  نشان‌دهنده مقدار تقریبی از  $U_i^n = u(x_i, t_n)$  باشد و  $f_i^n = f(x_i, t_n)$  در این بخش از عملگر تفاضلی گرانوالد-لتنیکوف انتقال یافته وزن دار (۹) برای گسسته سازی زمانی و از فرمول تفاضلات متناهی فشرده مرتبه چهارم

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\delta_x^2}{h^2(1 + \frac{1}{12}\delta_x^2)} u(x, t) + \mathcal{O}(h^4), \quad (13)$$

برای مکانی گسسته‌سازی مسأله نفوذ کسری-زمانی (۱) استفاده شده است که در آن  $\delta_x$  نشان‌دهنده عملگر تفاضلات مرکزی  $\delta_x u(x_i, t_n) := u(x_i + \frac{h}{2}, t_n) - u(x_i - \frac{h}{2}, t_n)$  می‌باشد. فرض کنید  $u(x, t) \in C_{x,t}^{2,3}([a, b] \times [0, T])$  و همچنین داشته باشیم

$$\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq k \leq 3,$$

که در آن  $C_{x,t}^{\rho,\nu}([a, b] \times [0, T])$  نشان‌دهنده مجموعه همه توابعی است که تا مشتق ششم نسبت به  $x$  روی ناحیه  $[a, b]$  و تا مشتق سوم نسبت به  $t$  روی ناحیه  $[0, T]$  پیوسته هستند. اگر قرار دهیم  $F(x, t) = {}_0 D_t^{-\alpha} f(x, t)$ ، آنگاه فرم گسسته‌سازی شده مسأله نفوذ کسری-زمانی (۱) به صورت زیر است

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau^\alpha} \sum_{k=0}^n w_k^{(\alpha)} \mathcal{A} u_i^{n-k} = \kappa_\alpha \frac{\delta_x^\nu}{h^\nu} u_i^n + \mathcal{A} f_i^n, & 1 \leq i \leq M-1, \quad 2 \leq n \leq N, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau^\alpha} \mathcal{A} u_i^n = \frac{\nu \kappa_\alpha}{\Gamma(\alpha + \nu)} \frac{\delta_x^\nu}{h^\nu} u_i^n + \frac{1}{\tau^\alpha} \mathcal{A} F_i^n, & 1 \leq i \leq M-1, \quad n = 1, \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} u_i^0 = 0, & 0 \leq i \leq M, \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} u_0^n = \beta(t_n), \quad u_M^n = \gamma(t_n), & 0 \leq n \leq N. \end{cases} \quad (17)$$

نمایش ماتریسی روش پیشنهادی. اگر  $\mathbf{U}^n = [u_1^n, u_2^n, \dots, u_{M-1}^n]^T$  و  $\mathbf{F}^n = [F_1^n, F_2^n, \dots, F_{M-1}^n]^T$  برای  $2 \leq n \leq N$  قرار دهیم آن‌گاه یک فرمول‌بندی ماتریسی از روش پیشنهادی به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \mathbf{U}^0 = [0, 0, \dots, 0]^T, \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 \mathbf{U}^n = -\mathbf{J} \mathbf{F}^n + B_0^n \mathbf{I}_1 + B_M^n \mathbf{I}_M, & n = 1, \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \mathbf{A} \mathbf{U}^n = \mathbf{J} \left( \sum_{k=1}^n w_k^{(\alpha)} \mathbf{U}^{n-k} - \tau^\alpha \mathbf{F}^n \right) + B_0^n \mathbf{I}_1 + B_M^n \mathbf{I}_M, & n = 2, 3, \dots, N, \end{cases} \quad (20)$$

که در آن  $\mathbf{A} = (\mu \mathbf{J}_2 - \rho_1 \mathbf{J})$ ،  $\mathbf{A}_1 = (\frac{\nu \mu}{\Gamma(\nu + \alpha)} \mathbf{J}_2 - \mathbf{J})$  و  $\mu = \kappa_\alpha \frac{\tau^\alpha}{h^\nu}$ . همچنین مقدار  $\rho_1$  در (۱۱) داده شده است و

$$\begin{cases} B_0^1 = (\frac{1}{\nu} - \frac{\nu \mu}{\Gamma(\nu + \alpha)}) \beta(t_1) - \frac{1}{\nu} F_1^1, \\ B_0^n = \frac{1}{\nu} \left( \sum_{k=0}^n w_k^{(\alpha)} \beta(t_{n-k}) - \nu \mu \beta(t_n) - \tau^\alpha f_0^n \right), & 2 \leq n \leq N, \\ B_M^1 = (\frac{1}{\nu} - \frac{\nu \mu}{\Gamma(\nu + \alpha)}) \gamma(t_1) - \frac{1}{\nu} F_M^1, \\ B_M^n = \frac{1}{\nu} \left( \sum_{k=0}^n w_k^{(\alpha)} \gamma(t_{n-k}) - \nu \mu \gamma(t_n) - \tau^\alpha f_M^n \right), & 2 \leq n \leq N, \end{cases} \quad (21)$$

و ماتریس‌های  $\mathbf{J} = \frac{1}{\nu} \text{Diag}(1, 1^0, 1)$  و  $\mathbf{J}_2 = \text{Diag}(1, -2, 1)$  سه قطری هستند. به‌علاوه  $\mathbf{I}_1$  و  $\mathbf{I}_M$  بردارهای ستونی  $M-1$  مولفه‌ای هستند که عنصر اول و آخر آن‌ها ۱ و بقیه عناصرش صفر می‌باشند. همانطور که ملاحظه می‌شود در هر سطح زمانی  $n$ ، دستگاه معادلات جبری (۱۸)، تشکیل یک سیستم سه قطری خطی  $(M-1)$ -بعدی می‌دهد.

**قضیه ۱.۳.** برای هر  $0 < \alpha < 1$ ، روش عددی (۱۸) برای حل مسأله نفوذ کسری (۱) دارای یک جواب منحصر به فرد است.

**قضیه ۲.۳.** روش عددی (۱۸) برای هر  $0 < \alpha < 1$  همواره پایدار است.

**قضیه ۳.۳.** فرض کنید  $u(x, t) \in C_{x,t}^{\rho,\nu}([a, b] \times [0, T])$  جواب واقعی مسئله (۱) باشد و

$$\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, 3.$$

به‌علاوه فرض کنید  $\{u_i^n \mid 0 \leq i \leq M, 0 \leq n \leq N\}$  جواب دستگاه معادلات (۱۸) باشد و قرار دهید

$$e_i^n := u(x_i, t_n) - u_i^n, \quad 0 \leq i \leq M, 0 \leq n \leq N.$$

در این صورت روش تفاضلی ضمنی (۱۸) نسبت به نرم  $L_\infty$  دارای نرخ همگرایی از مرتبه  $O(\tau^3 + h^4)$  است و ثابت  $C_3$  به‌گونه‌ای موجود است که برای  $\mathbf{e}^n = [e_1^n, \dots, e_{M-1}^n]^T$  داریم

$$\|\mathbf{e}^n\|_2 \leq C_3 T^\alpha \sqrt{M-1} \exp\left(\frac{19}{3}\right) (\tau^3 + h^4), \quad 1 \leq n \leq N.$$

جدول ۱: برای مقادیر مختلف از مرتبه مشتق  $\alpha$ ، طول گام مکانی  $h = \frac{1}{1000}$  و  $\beta = 5$ ، نتایج عددی شامل ماکزیمم خطا و نرخ همگرایی زمانی حاصل از روش GL3 برای حل مسأله (۲۲)، هنگامی که بازه  $[0, 1]$  به  $N$  زیربازه افزایش شده است.

$\alpha$	$N$	ماکزیمم خطا	نرخ همگرایی زمانی
۰٫۱	۲۰	$5.547e-06$	—
	۴۰	$7.227e-07$	۲٫۹۴۰
	۸۰	$9.218e-08$	۲٫۹۷۱
	۱۶۰	$1.163e-08$	۲٫۹۸۷
۰٫۵	۲۰	$5.015e-05$	—
	۴۰	$6.528e-06$	۲٫۹۴۱
	۸۰	$8.325e-07$	۲٫۹۷۱
	۱۶۰	$1.051e-07$	۲٫۹۸۶
۰٫۸	۲۰	$1.509e-04$	—
	۴۰	$1.957e-05$	۲٫۹۴۷
	۸۰	$2.491e-06$	۲٫۹۸۴
	۱۶۰	$3.141e-07$	۲٫۹۸۷
۰٫۹۵	۲۰	$1.692e-04$	—
	۴۰	$2.192e-05$	۲٫۹۸۷
	۸۰	$2.788e-06$	۲٫۹۸۷
	۱۶۰	$3.516e-07$	۲٫۹۸۷

#### ۴ مثال‌های عددی

در این بخش نتایج عددی حاصل از پیاده‌سازی روش پیشنهادی برای حل عددی مسأله نفوذ کسری-زمانی مرتبه-متغیر ارائه شده است.

مثال ۱۰۴. مسأله نفوذ کسری-زمانی زیر را روی  $\Omega = (x, t) \in (0, 1) \times (0, 1]$  در نظر بگیرید

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha u(x, t) = u_{xx}(x, t) + t^\beta \sin(x) \left( \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} t^{-\alpha} + 1 \right), \\ u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1], \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = t^\beta \sin(1), \quad t \in [0, 1], \end{cases} \quad (22)$$

که جواب واقعی مسئله عبارتست از  $u(x, t) = t^\beta \sin(x)$ .

روش پیشنهادی داده شده توسط (۱۸) برای حل عددی مسأله نفوذ کسری از مرتبه  $0 < \alpha < 1$  داده شده در مثال ۱۰۴ به‌کار برده شده است. این روش طبق قضیه ۲۰۳، همواره و بدون هیچ شرطی پایدار است. از طرفی با توجه به این‌که جواب واقعی به فرم  $u(x, t) = t^\beta \sin(x)$  است، بنابراین با توجه به این‌که تابع جواب نسبت به  $x$  به اندازه کافی هموار است پس هرگاه  $\beta \geq 3$ ، آن‌گاه مفروضات قضیه ۲۰۳ برقرار است و در نتیجه نرخ همگرایی روش برابر با  $O(\tau^3 + h^4)$  خواهد بود. در این صورت جهت بررسی نرخ همگرایی روش پیشنهادی و کارایی آن در حل یک مسأله نفوذ کسری-زمانی، برای مقادیر مختلف از طول گام‌های  $\tau$  و  $h$  و همچنین مقادیر مختلف مرتبه کسری  $\alpha$ ، نتایج عددی شامل ماکزیمم خطا و نرخ‌های همگرایی زمانی و مکانی حاصل از این روش برای حل مسأله (۲۲)، در جدول‌های ۱ و ۲ ارائه شده است.

#### ۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش عددی برای حل یک معادله نفوذ کسری-زمانی حاوی یک جمله مشتق صحیح مرتبه دوم نسبت به متغیر  $x$  و یک جمله مشتق کسری کاپوتو از مرتبه  $\alpha$  نسبت به متغیر  $t$  فرمول‌بندی شده است. برای گسسته‌سازی مشتق صحیح مرتبه دوم از یک فرمول تفاضلات متناهی فشرده با نرخ همگرایی چهار و برای گسسته‌سازی مشتق کسری کاپوتو

جدول ۲: برای مقادیر مختلف از مرتبه مشتق  $\alpha$ ، طول گام زمانی  $\tau = \frac{1}{3300}$  و  $\beta = 5$ ، نتایج عددی شامل ماکزیمم خطا و نرخ همگرایی مکانی حاصل از روش GL3 برای حل مسأله (۲۲)، هنگامی که بازه  $[0, 1]$  به  $M$  زیربازه افراز شده است.

$\alpha$	$M$	ماکزیمم خطا	نرخ همگرایی مکانی
۰٫۱	۳	$2.667e-06$	—
	۶	$1.681e-07$	۳٫۹۸۷
	۱۲	$1.078e-08$	۳٫۹۶۴
	۲۴	$6.734e-10$	۴٫۰۰۰
۰٫۵	۳	$2.436e-06$	—
	۶	$1.521e-07$	۴٫۰۰۱
	۱۲	$9.794e-09$	۳٫۹۵۷
	۲۴	$6.122e-10$	۴٫۰۰۰
۰٫۸	۳	$2.087e-06$	—
	۶	$1.300e-07$	۴٫۰۰۵
	۱۲	$8.312e-09$	۳٫۹۶۷
	۲۴	$5.190e-10$	۴٫۰۰۲
۰٫۹۵	۳	$2.035e-06$	۴٫۰۰۵
	۶	$1.267e-07$	—
	۱۲	$8.088e-09$	۳٫۹۶۹
	۲۴	$5.040e-10$	۴٫۰۰۴

یک فرمول تفاضلی گرانوالد-لتنیکوف انتقال یافته وزن دار با نرخ همگرایی سه اعمال شده است. روش پیشنهادی سراسر است و به راحتی قابل پیاده سازی است و همچنین به دلیل حضور ماتریس های سه قطری متناظر با عملگرهای تفاضلاتی مرکزی، فرم ماتریسی این روش که حاوی یک ماتریس ضرایب سه قطری غالب است ارائه شده است. با استفاده از محاسبه مقادیر ویژه ماتریس ضرایب و در نتیجه آنالیز پایداری و همگرایی روش نسبت به نرم  $L_2$  نشان داده شده است که این روش برای یک مسأله نفوذ خطی بدون هیچ شرطی همواره پایدار است و نسبت به زمان دارای نرخ همگرایی سه و نسبت به مکان دارای نرخ همگرایی چهار است. نتایج عددی ارائه شده در مقاله نتایج تئوری را تأیید می کنند.

## مراجع

- [1] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [2] D.A. Benson, S.W. Wheatcraft and M.M. Meerschaert, The fractional-order governing equation of levy motion, *Water resources research*, 36 (2000) No. 6, 1413–1423, .
- [3] K. Burrage, A. Cardone, R. D'Ambrosio and B. Paternoster, Numerical solution of time fractional diffusion systems, *Applied Numerical Mathematics*, 116 (2017) 82–94.
- [4] C. Chen, F. Liu and K. Burrage, Finite difference methods and a fourier analysis for the fractional reaction-subdiffusion equation, *Applied Mathematics and Computation*, 198 (2008) No. 2, 754–769 .
- [5] C.C. Ji, and Z. Sun, A high-order compact finite difference scheme for the fractional sub-diffusion equation, *Journal of Scientific Computing*, 64 (2015) No. 3, 959–985.



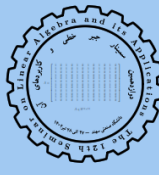
دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران

دوازدهمین سمینار بین المللی

جبر خطی

و کاربردهای آن

۲۷ الی ۲۸ تیرماه ۱۴۰۲



Sahand University of Technology, Tabriz, Iran

The 12th International Seminar on

Linear Algebra

and its Applications

July 18 - 19, 2023



## حل معادلات دیفرانسیل کسری با استفاده از موجک‌های بی‌اسپلاین خطی

عبداله الهی<sup>۱</sup> \* و صفر ایراندوست پاکچین<sup>۲</sup> و اصغر رحیمی<sup>۳</sup>

<sup>۱،۳</sup> گروه ریاضی، دانشگاه مراغه، مراغه

<sup>۲</sup> گروه ریاضی، دانشگاه تبریز، تبریز

### چکیده

در این مقاله تابع بی‌اسپلاین خطی و موجک مربوط به آن معرفی می‌شود. سپس ماتریس عملیاتی مشتق کسری ساخته و با استفاده از خواص موجک‌ها و همچنین ماتریس عملیاتی مشتق کسری معادلات دیفرانسیل کسری جزئی (FPDIE) حل می‌شوند. در ادامه، برای تشریح بیشتر مسئله، یک مثال ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل کسری جزئی، مشتق کاپوتو، موجک بی‌اسپلاین خطی، ماتریس عملیاتی مشتق کسری.

### ۱ مقدمه

اخیراً موجک‌های بی‌اسپلاین خطی شبه متعامد در حل مسائل مختلف معادلات دیفرانسیل کسری جایگاه ویژه‌ای را به خود اختصاص داده است. سادگی و رسایی تابع‌های بی‌اسپلاین و روابط بازگشتی بین آنها و همچنین کاربردهای گوناگون این توابع در حل مسائل، توجه دانشمندان و ریاضیدانان را به خود جلب کرده است. موجک‌ها ابزاری مناسب برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی کسری و معادلات انتگرالی می‌باشند. حدود چهار دهه اخیر موجک‌ها را ریاضیدانانی نظیر ماله، فورگو و گیرا و گراسمن معرفی کردند. دلیل اصلی موفقیت موجک‌ها را می‌توان در دو مورد دانست: (۱) فرضیه موجک‌ها را می‌توان تلفیقی از علوم مهندسی، فیزیک و ریاضیات در نظر گرفت، (۲) موجک‌ها ابزار نسبتاً ساده ریاضی هستند که کاربردهای گوناگون دارند [۲، ۳].

هدف ما در این مقاله، حل معادله دیفرانسیل کسری نسبی (FPDE) به شکل

$$a_1 \frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha} + a_2 \frac{\partial^\beta y}{\partial t^\beta} = f(x, t), \quad (1)$$

با شرایط مرزی

$$\begin{cases} y(\circ, t) = g_0(t) \\ y(x, \circ) = g_1(t) \end{cases} \quad (2)$$

که در آن  $a_1$  و  $a_2$  ثابت‌های دلخواه و  $0 < \alpha, \beta \leq 1$  و  $y(x, t) \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$  می‌باشد.

\* سخنران. آدرس ایمیل: Abdollahelahi@yahoo.com

## ۲ بررسی منابع و پیشینه

هدف این مقاله حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی با دخالت مقیاس‌ها و موجک‌ها می‌باشد (معادلاتی به فرم (۱)). آقای لکستانی از موجک‌ها برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم و معادلات انتگرال هالن استفاده کرده است. همچنین، آقای ایراندوست پاکچین برای حل معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی با استفاده از موجک‌ها تحقیقاتی انجام داده‌اند [۱].

برای این منظور، ابتدا تابع بی‌اسپلاین خطی و مرکب مربوط به آن را همراه انتقال‌ها و اتساع‌هایشان به صورت زیر معرفی می‌کنیم [۳]:

$$\varphi(x) = N_{\gamma}(x) = \begin{cases} x & ; x \in [0, 1) \\ \gamma - x & ; x \in [1, \gamma) \\ 0 & ; \text{سایر جاها} \end{cases} ; \varphi_{j,k}(x) = \varphi(\gamma^j x - k)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x & ; 0 \leq x < \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{6}x + \frac{2}{3} & ; \frac{1}{6} \leq x < \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} & ; \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} & ; \frac{2}{3} \leq x < 1 \\ \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} & ; 1 \leq x < \frac{7}{6} \\ 0 & ; \text{سایر جاها} \end{cases} ; \psi_{j,k}(x) = \psi(\gamma^j x - k).$$

حال باید  $\psi$  را متشکل از انتقال‌ها و اتساع‌های بردارهای بی‌اسپلاین و موجک به فرم زیر تشکیل دهیم:

$$\psi = \begin{bmatrix} \varphi(\gamma^j x + 1) \\ \varphi(\gamma^j x) \\ \vdots \\ \varphi(\gamma^j x - \gamma^j + 1) \\ \psi(\gamma^j x + 1) \\ \psi(\gamma^j x) \\ \vdots \\ \psi(\gamma^j x - \gamma^j + 1) \end{bmatrix}.$$

حال مشتق کسری کاپوتا از مرتبه  $0 < \beta < 1$ ،  $\varphi(x)$  و  $\psi(x)$  را به صورت زیر داریم:

$$D^{\beta} \varphi(x) = D^{\beta} N_{\gamma}(x) = \Omega(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ \frac{-x^{1-\beta}}{\Gamma(\gamma-\beta)} & ; 0 \leq x < 1 \\ \frac{-x^{1-\beta} + \gamma(x-1)^{1-\beta}}{\Gamma(\gamma-\beta)} & ; 1 \leq x < \gamma \\ \frac{-x^{1-\beta} + \gamma(x-1)^{1-\beta} - (\gamma-1)^{1-\beta}}{\Gamma(\gamma-\beta)} & ; \gamma \leq x < \infty \end{cases}$$

$$D^{\beta} \psi(x) = \omega(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma-\beta)}$$

$$\times \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ -\frac{1}{6}x^{1-\beta} & ; 0 \leq x < \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6}x^{1-\beta} + \frac{2}{3}(x-\frac{1}{6})^{1-\beta} & ; \frac{1}{6} \leq x < \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6}x^{1-\beta} + \frac{2}{3}(x-\frac{1}{6})^{1-\beta} - \frac{23}{12}(x-1)^{1-\beta} & ; 1 \leq x < \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6}x^{1-\beta} + \frac{2}{3}(x-\frac{1}{6})^{1-\beta} - \frac{23}{12}(x-1)^{1-\beta} + \frac{1}{3}(x-\frac{2}{3})^{1-\beta} & ; \frac{2}{3} \leq x < 1 \\ -\frac{1}{6}x^{1-\beta} + \frac{2}{3}(x-\frac{1}{6})^{1-\beta} - \frac{23}{12}(x-1)^{1-\beta} + \frac{1}{3}(x-\frac{2}{3})^{1-\beta} - \frac{23}{12}(x-2)^{1-\beta} & ; 1 \leq x < \frac{7}{6} \\ -\frac{1}{6}x^{1-\beta} + \frac{2}{3}(x-\frac{1}{6})^{1-\beta} - \frac{23}{12}(x-1)^{1-\beta} + \frac{1}{3}(x-\frac{2}{3})^{1-\beta} - \frac{23}{12}(x-2)^{1-\beta} + \frac{2}{3}(x-\frac{5}{6})^{1-\beta} & ; \frac{7}{6} \leq x < 2 \end{cases}$$



باید

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} \varphi(2^j x + 1) \\ \varphi(2^j x) \\ \vdots \\ \varphi(2^j x - 2^j + 1) \\ \psi(2^j x + 1) \\ \psi(2^j x) \\ \vdots \\ \psi(2^j x - 2^j + 1) \end{bmatrix} \Rightarrow D^\beta \phi(x) = \begin{bmatrix} \Omega(2^j x + 1) \\ \vdots \\ \Omega(2^j - 2^j + 1) \\ \omega(2^j x + 1) \\ \vdots \\ \omega(2^j x - 2^j + 1) \end{bmatrix} = D_\beta \phi(x).$$

### ۳ حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی کسری

برای حل معادله دیفرانسیل جزئی کسری (۱) با شرایط مرزی (۲) ابتدا تابع  $y(x, t)$  را برحسب توابع کاردینال بی اسپلاین به صورت

$$y(x, y) \approx \sum_{i=-1}^{2^J-1} \sum_{j=-1}^{2^J-1} \Omega_{ij} \phi_{J,i}(x) \phi_{J,j}(t) = \Phi_J^T(x) \Omega \Phi(t), \quad (3)$$

تقریب می‌زنیم که در آن ماتریس مجهول  $\Omega$  با بعد  $(2^J + 1) \times (2^J + 1)$  باید محاسبه شود. داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha} &= \Phi_J^T(x) D_\alpha^T \Omega \Phi_J(t), \\ \frac{\partial^\beta y}{\partial t^\beta} &= \Phi_J^T(x) \Omega D_\beta \Phi_J(t). \end{aligned} \quad (4)$$

همچنین با جایگذاری رابطه (۴) در رابطه (۱) به رابطه

$$\Phi_J^T(x) (a_1 D_\alpha^T \Omega + a_2 \Omega D_\beta) \Phi_J(t) = f(x, t), \quad (5)$$

می‌رسیم که با قرار دادن نقاط هم‌محلی  $x_j = t_j = j/2^J$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2^J$  در رابطه (۵) داریم

$$e_i^T (a_1 D_\alpha^T \Omega + a_2 \Omega D_\beta) e_j = f(x_i, t_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, 2^J. \quad (6)$$

با جایگذاری رابطه (۳) در رابطه (۲) داریم:

$$\begin{aligned} \Phi_J^T(\circ) \Omega \Phi_J(t) &= g_\circ(t), \\ \Phi_J^T(x) \Omega \Phi_J(\circ) &= g_1(x), \end{aligned} \quad (7)$$

که با قرار دادن نقاط هم‌محلی  $x_i = i/2^J$  و  $t_j = j/2^J$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2^J$  در رابطه (۷) داریم:

$$\begin{aligned} e_\circ^T \Omega e_j &= g_\circ(t_j), & j &= 1, 2, \dots, 2^J, \\ e_i^T \Omega e_\circ &= g_1(x_i), & i &= \circ, 1, \dots, 2^J. \end{aligned} \quad (8)$$

از روابط (۶) و (۸)، معادله خواهیم داشت که از حل این معادلات درایه‌های بردار مجهول  $\Omega$  به دست می‌آیند. در ادامه به حل عددی یک مثال با استفاده از روش ارائه شده می‌پردازیم.

مثال ۱.۳. معادله دیفرانسیل کسری جزئی

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{1/2} y}{\partial x^{1/2}} + \frac{\partial^{1/2} y}{\partial t^{1/2}} &= \frac{\lambda}{3} x^{2/3} + \frac{\lambda}{3} t^{2/3}, \\ y(x, \circ) &= x^2, \\ y(\circ, t) &= t^2, \end{aligned}$$

را در نظر بگیرید. این مسئله دارای جواب دقیق  $y(x, t) = x^2 + t^2$  است. خطای نرم  $L_2$  و  $L_\infty$  برای مقادیر مختلف  $J$  با استفاده از روش ارائه شده در بازه  $[0, 1] \times [0, 1]$  در جدول ۱ بیان شده است.

جدول ۱: خطای نرم  $L_2$  و  $L_\infty$  برای مقادیر مختلف  $J$  برای تابع  $y(x)$  در مثال ۱.۳.

	$L_\infty$	$L_2$
$J = 3$	$2.5 \times 10^{-2}$	$1.4 \times 10^{-2}$
$J = 4$	$9.3 \times 10^{-3}$	$5.4 \times 10^{-3}$
$J = 5$	$3.4 \times 10^{-3}$	$2.0 \times 10^{-3}$

## ۴ نتیجه‌گیری

با توجه به سادگی موجک‌های بی‌اسپلاین خطی، کار با آنها از پیچیدگی کمتری برخوردار است. نتیجه‌گیری کلی به این صورت است که معادلات دیفرانسیل کسری را می‌توان بدون مشکلات نه‌چندان زیادی با استفاده از موجک‌ها حل کرد. بدون شک این ابزار به خصوص تعاریف مشتق کسری از جمله کاپوتو نیز در آینده‌ای نه‌چندان دور به تعاریف جامع‌تر و ابزارهای قوی‌تری مجهز خواهد شد.

## مراجع

- [۱] ص. ایراندوست پاکچین، روش‌های کارآمد برای حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی، رساله دکتری، دانشگاه تبریز، ۱۳۹۱.
- [2] S. Irandoust-Pakchin, Exact solutions for some of the fractional differential equations by using modifications of He's variational iteration method, *Mathematical Sciences.*, 5 (2011), No. 1, 51–60.
- [3] S. Irandoust-pakchin, M. Dehghan, S. Abdi-mazraeh, M. Lakestani, Numerical solution for a class of fractional convection-diffusion equations using the flatlet oblique multiwavelets, *Journal of Vibration and Control.*, 20 (2014), No. 6, 913–924.

## بررسی حل پذیری دستگاه معادلات حاصل از روش هم محلی برای حل معادله انتگرال ولترای نوع سوم

فاطمه شایان فرد \*

گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

### چکیده

در حالت کلی حل پذیری دستگاه معادلات حاصل از روش هم محلی با تقسیم بندی یکنواخت و یا با تقسیم بندی مدرج برای معادلات انتگرال ولترا با عملگرهای انتگرالی غیر فشرده تضمین نمی شود. در این مقاله یک تقسیم بندی مدرج اصلاح شده مورد استفاده قرار گرفته است که به ازای آن معادله های هم محلی همواره به ازای هر انتخاب از پارامترهای هم محلی حل پذیر هستند.

واژه‌های کلیدی: حل پذیری، معادله انتگرال ولترا، روش هم محلی، تقسیم بندی مدرج اصلاح شده

کد موضوع بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 45D05

### ۱ مقدمه

معادله انتگرالی

$$t^\beta y(t) = f(t) + \int_0^t (t-x)^{-\alpha} k(t,x)y(x)dx, \quad t \in I = [0, T], \quad (1)$$

با  $\beta > 0$  و  $\alpha \in (0, 1)$  یک معادله انتگرال ولترای نوع سوم نامیده می شود. در این معادله فرض بر اینست که هسته  $k$  روی مجموعه  $D = (t, x) : 0 \leq x \leq t \leq T$  پیوسته است و به ازای تابعی مانند  $g(t)$  که روی  $I$  پیوسته است رابطه  $f(t) = t^\beta g(t)$  برقرار است. معادله (۱) با معادله زیر هم ارز است

$$y(t) = g(t) + \Omega_{k,\beta,\alpha}y(t) \quad (2)$$

که در آن

$$\Omega_{k,\beta,\alpha}y(t) = \int_0^t (t-x)^{-\alpha} k(t,x)y(x)dx, \quad t \in I = [0, T], \quad (3)$$

سیدعلایی و همکاران در [۲] ثابت کرده اند که اگر  $\alpha + \beta \in (0, 1)$  باشد عملگر  $\Omega_{k,\beta,\alpha}$  یک عملگر فشرده است و در حالتی که  $\alpha + \beta = 1$  باشد عملگر (۲) وقتی که  $k(0,0) = 0$  است فشرده است و اگر  $\alpha + \beta > 1$  باشد عملگر  $\Omega_{k,\beta,\alpha}$  همراه با شرط  $k(t,x) = x^{\alpha+\beta-1}h(t,x)$ ،  $h(0,0) = 0$  یک عملگر فشرده خواهد بود.

روش های متعددی برای حل معادلات انتگرال ولترا ارائه شده است که در بین آنها روش هم محلی یکی از روش های مناسب برای حل معادلات انتگرال ولترا است [۱]. همچنین می توان روش هم محلی را به صورت چندگامی برای حل

\* سخنران. آدرس ایمیل: fshayanfard@pnu.ac.ir

معادلات انتگرالی به کار برد که این کار باعث افزایش مرتبه همگرایی خواهد شد. در [۴] روش هم محلی چندگامی برای حل دسته ای از معادلات انتگرال ولترای نوع سوم بکار برده شده است. در روش هم محلی ابتدا بازه  $[0, T]$  به  $N$  قسمت تقسیم می شود. این تقسیم بندی می تواند به صورت تقسیم بندی یکنواخت<sup>۱</sup> و یا تقسیم بندی مدرج<sup>۲</sup> صورت پذیرد. اما اگر عملگر انتگرالی فشرده نباشد حل پذیری دستگاه معادلات حاصل از تقسیم بندی یکنواخت و یا تقسیم بندی مدرج روی بعضی از زیر بازه ها دچار اختلال می شود. لذا در [۳] یک تقسیم بندی مدرج اصلاح شده<sup>۳</sup> معرفی شده است که حل پذیری دستگاه را به ازای هر انتخاب از پارامترهای هم محلی تضمین می کند.

در این مقاله در بخش اول ابتدا ساختار روش هم محلی برای حل معادله (۱) بیان می شود، سپس در بخش دوم تقسیم بندی مدرج اصلاح شده بیان شده و مثالی از یک معادله انتگرال ولترای نوع سوم ارائه می شود که به کمک روش هم محلی و با تقسیم بندی مدرج اصلاح شده جواب آن تقریب زده می شود.

## ۲ ساختار روش هم محلی

در این بخش جواب معادله (۱) را در فضای

$$S_{m-1}(I_h) = \{P | P|_{\sigma_n} \in \pi_{m-1} : 0 \leq n \leq N-1\} \quad (۴)$$

تقریب می کنیم که در آن  $I_h = \{t_n | t_0 < t_1 < \dots < t_N\}$  افزای از بازه  $I$  و  $\sigma_n = (t_n, t_{n+1})$ ،  $h_n = t_{n+1} - t_n$  و  $h = \max\{h_n : 0 \leq n \leq N-1\}$  است. مجموعه نقاط هم محلی به صورت

$$X_h := \{t_{n,j} = t_n + c_j h_n : 0 < c_1 < c_2 < \dots < c_m \leq 1, 0 \leq n \leq N-1\} \quad (۵)$$

تعریف می شود و  $c_j$  ها پارامترهای هم محلی نامیده می شوند. تقریب  $P_h(t)$  از جواب معادله (۱) عضوی از فضای  $S_{m-1}$  است که برحسب ترکیب خطی توابع پایه ای لاگرانژ به صورت

$$P_h(t_n + sh_n) = \sum_{j=1}^m Y^{n,j} L_j(s), \quad s \in (0, 1] \quad (۶)$$

در نظر گرفته می شود که در آن  $Y^{n,j} = y(t_{n,j})$  است و در نقاط هم محلی بطور دقیق در رابطه (۱) صدق می کند. پس

$$t^\beta P_h(t) = f(t) + \int_0^t (t-x)^{-\alpha} k(t,x) P_h(x) dx, \quad t \in X_h. \quad (۷)$$

اکنون با قرار دادن رابطه (۶) در (۷) به ازای  $s = c_j$  و با انجام پاره ای از محاسبات و تعریف ماتریس های

$$B_n^l = \left( \int_0^1 \left( \frac{t_{n,i} - t_l}{h_l} - s \right)^{-\alpha} k(t_{n,i}, t_l + sh_l) L_j(s) ds \right)_{i,j=1,\dots,m}, \quad (۸)$$

$$B_n = \left( \int_0^{c_i} (c_i - s)^{-\alpha} k(t_{n,i}, t_n + sh_n) L_j(s) ds \right)_{i,j=1,\dots,m} \quad (۹)$$

و

$$T_n = \text{diag}(t_{n,1}, \dots, t_{n,m}), \quad (۱۰)$$

به معادله ماتریسی

$$(T_n^\beta - h_n^{1-\alpha} B_n) Y^{(n)} = F_n + \sum_{l=0}^{n-1} h_l^{1-\alpha} B_n^l Y^{(l)} \quad (۱۱)$$

<sup>1</sup>Uniform mesh

<sup>2</sup>Graded mesh

<sup>3</sup>Modified graded mesh

خواهیم رسید که  $Y^{(n)} = (Y^{n,1}, \dots, Y^{n,m})$  و  $F_n = (f(t_{n,1}), \dots, f(t_{n,1}))^T$ . حال اگر ماتریس های  $(T_n^\beta - h_n^{1-\alpha} B_n)$  وارون پذیر باشند دستگاه فوق دارای جواب یکتا خواهد بود. اما چون  $c_1 > 0$  پس  $T_n^\beta$  وارون پذیر هستند و لذا با در نظر گرفتن

$$G_n := T_n^{-\beta} F_n, \quad D_n^l := T_n^{-\beta} B_n^l, \quad l = 0, \dots, n-1, \quad D_n = T_n^{-\beta} B_n, \quad (12)$$

دستگاه (11) با دستگاه

$$(I - h_n^{1-\alpha} D_n) Y^{(n)} = G_n + \sum_{l=0}^{n-1} h_l^{1-\alpha} D_n^l Y^{(l)} \quad (13)$$

معادل است و در نتیجه حل پذیری روش هم محلی وابسته به معکوس پذیری ماتریس های  $(I - h_n^{1-\alpha} D_n)$  خواهد بود.

**قضیه ۱.۲.** فرض کنید  $k \in C(D)$  و  $\alpha + \beta \in (0, 1)$ . در اینصورت به ازای هر انتخاب از پارامترهای هم محلی یک  $\bar{h}$  وجود دارد که برای  $h = \max_n h_n \leq \bar{h}$  همه ماتریس های  $(I - h_n^{1-\alpha} D_n)$  معکوس پذیر هستند. [3]

مثال های زیر نشان می دهند که در حالتی که  $\alpha + \beta \geq 1$  است حل پذیری روش هم محلی روی تقسیم بندی یکنواخت  $(t_n = \frac{n}{N} T, \quad n = 0, \dots, N)$  و یا تقسیم بندی مدرج  $(t_n = (\frac{n}{N})^q T, \quad q > 1, \quad n = 0, \dots, N)$  برای بازه  $[0, T]$  دچار اختلال می شود.

**مثال ۲.۲.** فرض کنید  $\alpha = 0$ ،  $\beta = 1$  و  $k(t, x) = 5$  در اینصورت به ازای  $m = 1$  و  $c_1 = \frac{1}{4}$  با تقسیم بندی یکنواخت بازه خواهیم داشت:

$$I - h_n^{1-\alpha} D_n = 1 - \frac{5}{2n+1} \quad (14)$$

که برای  $n = 2$  منفرد است.

**مثال ۳.۲.** در مثال قبل اگر  $k(t, x) = \frac{9}{5}$ ،  $c_1 = 1$ ،  $m = 1$  و  $q = 2$  باشد در این صورت

$$I - h^{1-\alpha} D_n = 1 - \frac{9(2n+1)}{5(n+1)^2} \quad (15)$$

به ازای  $n = 2$  منفرد خواهد بود.

### ۳ تقسیم بندی مدرج اصلاح شده

همان طور که در بخش قبلی مشاهده کردیم استفاده از تقسیم بندی یکنواخت و یا تقسیم بندی مدرج در برخی از حالتها می تواند حل پذیری دستگاه معادلات حاصل از روش هم محلی را در بعضی از زیر بازه ها دچار اختلال کند. بنابراین در این بخش به منظور رفع این مشکل یک تقسیم بندی مدرج اصلاح شده ارائه می شود و سپس از آن برای به دست آوردن جواب یک معادله انتگرال نوع سوم استفاده می شود.

**تعریف ۱.۳.** تقسیم بندی  $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T\}$  برای بازه  $I = [0, T]$  که به صورت

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{T}{N} \quad (16)$$

و

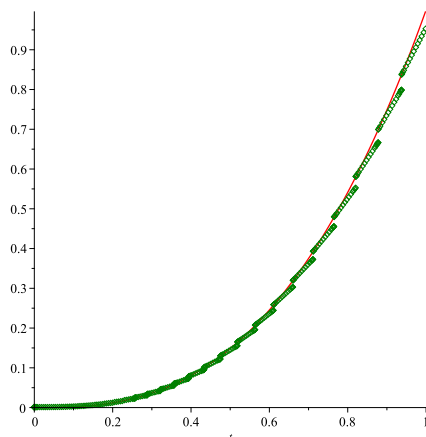
$$t_n = t_1 + (T - t_1) \left( \frac{n-1}{N-1} \right)^q, \quad n = 0, \dots, N, \quad (17)$$

تعریف می شود را تقسیم بندی مدرج اصلاح شده می نامیم.

قضیه ۲.۳. در معادله (۱) فرض کنید  $\alpha + \beta \geq 1$  باشد و  $k(t, x) = x^{\alpha+\beta-1}h(t, x)$  باشد که  $h \in C(D)$  و

$$h(\circ, \circ) \neq \frac{1}{B(\alpha + \beta + i - 1, 1 - \alpha)}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (18)$$

باشد که در آن  $B(r, s) = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}$  تابع بتای اولر است. در این صورت برای هر  $q > 1$  یک  $N_0$  وجود دارد که برای هر  $N \geq N_0$  ماتریس های  $I - h_n^{-\alpha} D_n, \quad n = 0, \dots, N - 1$  معکوس پذیر هستند. [۳]



شکل ۱: نمودار تقریب جواب معادله (۱۹) به روش هم محلی با نقاط چپی شف و  $N = 32$

اکنون برای مشاهده نتیجه ای از استفاده از تقسیم بندی مدرج اصلاح شده به بیان یک مثال می پردازیم.

مثال ۳.۳. در این مثال روش هم محلی را روی تقسیم بندی مدرج اصلاح شده برای به دست آوردن جواب تقریبی معادله انتگرال ولترای نوع سوم

$$ty(t) = \frac{67}{75}t^{\frac{10}{4}} + \int_0^t \frac{2}{5}y(x)dx, \quad t \in [0, 1], \quad (19)$$

به کار می بریم. جواب دقیق این معادله  $y(x) = x^{\frac{11}{4}}$  است. همچنین توجه داریم  $k(t, x) = \frac{2}{5}$  و  $k(\circ, \circ) \neq 0$  است لذا عملگر انتگرالی غیرفشرده است.

خطای حاصل از بکارگیری روش هم محلی برای معادله (۱۹) یک بار با نقاط چپی شف  $c_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{4}}$  و  $c_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}$  و یک بار هم با انتخاب پارامترهای هم محلی به صورت  $c_1 = \frac{1}{4}$  و  $c_2 = 1$  در جدول ۱ آمده است. همچنین شکل ۱ نمودار تقریب جواب را با نقاط چپی شف و در حالتی که  $N = 32$  است، نشان می دهد.

جدول ۱: خطای روش هم محلی برای مثال ۳.۳

$N$	$c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = 1$	$c_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{4}}, c_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}$
۸	$3.884 \times 10^{-2}$	$1.742 \times 10^{-2}$
۱۶	$1.437 \times 10^{-2}$	$7.967 \times 10^{-3}$
۳۲	$5.503 \times 10^{-3}$	$3.755 \times 10^{-3}$
۶۴	$2.273 \times 10^{-3}$	$1.817 \times 10^{-3}$
۱۲۸	$1.009 \times 10^{-3}$	$8.928 \times 10^{-4}$

## ۴ نتیجه‌گیری

در حل عددی یک معادله انتگرال ولترای نوع سوم به کمک روش هم محلی به منظور اطمینان خاطر برای حل پذیری دستگاه معادلات حاصل در حالتی که عملگر انتگرالی فشرده است می‌توان از تقسیم بندی های کلاسیک برای بازه استفاده کرد اما در حالتی که عملگر غیر فشرده است لازم است از تقسیم بندی مدرج اصلاح شده استفاده کرد که به کمک آن، روش مرتبه همگرایی قابل قبولی هم خواهد داشت.

## مراجع

- [1] Brunner, H., Collocation methods for Volterra integral and related functional equations, *Cambridge University Press*, (2004).
- [2] S. Seyed Allaei, Z.W. Yang, and H. Brunner, Existence, uniqueness and regularity of solutions for a class of third-kind Volterra integral equations, *J. Integral Equations Appl.*, 27 (2015), 325-342.
- [3] S. Seyed Allaei, Z.W. Yang, and H. Brunner, Collocation methods for third-kind VIEs, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 37 (2017), 1104-1124.
- [4] F. Shayanfard, H. Laeli Dastjerdi, and F.M. Maalek Ghaini, A numerical method for solving Volterra integral equations of the third-kind by multistep collocation method, *Comput. Appl. Math.* 38, (2019) 1-13.



دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران

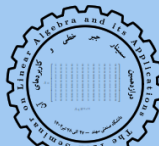
دوازدهمین سمینار بین المللی

جبر خطی

و کاربردهای آن



۲۷ الی ۲۸ تیرماه ۱۴۰۲



Sahand University of Technology, Tabriz, Iran

The 12th International Seminar on

Linear Algebra

and its Applications

July 18 - 19, 2023



## حل معادلات ماتریسی خطی به روش بهینه سازی تکامل تفاضلی

فاطمه توانگر مروستی<sup>۱</sup>، سید ابوالفضل شاهزاده فاضلی<sup>۲\*</sup> و اسراء موسوی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup>کارشناسی ارشد علوم کامپیوتر، دانشگاه یزد

<sup>۲</sup>عضو هیات علمی، بخش علوم کامپیوتر، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد

<sup>۳</sup>دانشجوی دکتری علوم کامپیوتر، دانشگاه یزد

### چکیده

حل اکثر مسائل در علوم مهندسی منجر به حل معادلات ماتریسی خطی می‌شود. تاکنون روش‌های مختلفی به منظور حل معادلات ماتریسی خطی ارائه شده است. با این حال یافتن روش مناسب جهت حل این معادلات با زمان کمتر و خطای پایین تر، مورد نظر محققین است. یکی از این روش‌ها، استفاده از روش‌های بهینه‌سازی است. در این مقاله سعی بر این است تا با استفاده از روش فراابتکاری تکامل تفاضلی، برای معادله ماتریسی خطی، بهترین جواب ممکن را به دست آوریم. این بهینه‌ساز به صورت ریاضی فرمول بندی می‌شود و به منظور توسعه این الگوریتم بهینه‌سازی مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش بهینه‌سازی تکامل تفاضلی برای حل معادلات ماتریسی خطی پیاده سازی شده است و نتایج آزمایشات انجام شده حاکی از کارایی موثر این روش در یافتن جواب بهینه معادله ماتریسی خطی است.

واژه‌های کلیدی: الگوریتم تکامل تفاضلی، بهینه‌سازی، معادلات ماتریسی خطی، روش‌های فراابتکاری

کد موضوع بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 68T20, 65F10, 78M50

### ۱ مقدمه

با افزایش پیچیدگی معادلات طی دهه‌های گذشته، وجود روش‌های بهینه‌سازی جدید بیش از گذشته ضرورت دارد؛ روش‌هایی که بطور تصادفی به ارائه بهترین جواب ممکن برای مسائل مختلف، می‌پردازند [۳]. الگوریتم‌های ابتکاری و فراابتکاری دو نوع الگوریتم تقریبی هستند که راه حل‌های قابل قبولی را در یک زمان معقول ارائه می‌دهند. این نوع الگوریتم‌ها برای حل مسائل پیچیده با ابعاد بالا و چند حالت ارائه شده‌اند. در نتیجه، تحقیقات طی دو دهه گذشته تلاش‌های متعددی را برای مسائل مختلف با استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری مبتنی بر رویکرد تقریبی را نشان می‌دهد.

مسئله مورد نظر حل معادله‌ی ماتریسی خطی عمومی  $A_1XB_1^T + \dots + A_KXB_K^T = C$  است. برای این منظور هدف یافتن تقریب مناسبی از  $X$  با استفاده از روش بهینه‌سازی تکامل تفاضلی است. این معادلات ماتریسی خطی می‌توانند دارای ماتریس ضرایب تنک  $A_{n \times n}$  باشند که  $n$  به بزرگی  $n = O(10^5)$  است. هدف مقاله حاضر حل دستگاه خطی به فرم:

$$\sum_{k=1}^K A_k X B_k^T = C$$

لازم بذکر است این روش در حل معادله لیاپانوف:

$$AX + XA^T = C$$

\* سخنران. آدرس ایمیل: fazeli@yazd.ac.ir



نیز قابل استفاده است، که مزیت آن امکان فرض رتبه پایین نبودن  $C$  است. لازم به ذکر است که روش‌های تصویر گالرکین، به‌روزرسانی رتبه-۱ حریصانه و غیره جهت حل این معادلات ارائه گردیده است [۲] و در حال حاضر با توجه به تاثیر چشمگیر روش‌های بهینه‌سازی بر کاهش تعداد گام‌ها جهت همگرایی به جواب، برای حل سریع‌تر این گونه معادلات مورد استفاده قرار می‌گیرد. در ادامه به بیان روش و الگوریتم مورد نظر پرداخته می‌شود.

## ۲ روش بهینه‌سازی تکامل تفاضلی

روش بهینه‌سازی تکامل تفاضلی<sup>۱</sup> یک روش بهینه‌سازی مبتنی بر جمعیت است که برای حل مسائل بهینه‌سازی پیچیده مورد استفاده قرار می‌گیرد. این روش توسط راینر استورن<sup>۲</sup> و کنت پرایس<sup>۳</sup> در دهه ۱۹۹۰ معرفی شد. روش  $DE$  بر مبنای تکامل جمعیتی عمل می‌کند و برخلاف روش‌های بهینه‌سازی دیگر، نیازی به دانش مستقیم در مورد ساختار مسئله ندارد [۱]. مراحل اصلی روش بهینه‌سازی تکامل تفاضلی شامل موارد زیر است:

۱. مقداردهی اولیه: یک جمعیت اولیه مجموعه‌ای از بردارهاست که به طور تصادفی تولید می‌شوند. هر بردار شامل مقادیر تصادفی در محدوده‌های تعیین شده برای متغیرهای مسئله است.

۲. عملیات جهش: در این مرحله، به ازای هر بردار موجود در جمعیت  $X_i$ ، سه بردار دیگر به صورت تصادفی انتخاب می‌شوند. سپس با استفاده از این سه بردار، یک بردار جدید به نام بردار جهش  $Y_i$  ایجاد می‌شود.

۳. عملیات ترکیب: در این مرحله، بردار هدف با بردار جهش جدیدی که برای آن تولید شده است، ترکیب می‌شود و بردار جدیدی با ترکیب ویژگی‌های بهتر از بردار هدف و بردار جهش یافته ایجاد می‌کند. عملیات ترکیب می‌تواند با استفاده از عامل وزنی یا روش‌های دیگری انجام شود.

۴. انتخاب: در این مرحله، بین بردار جدید و بردار قبلی، برداری انتخاب می‌شود که عملکرد بهتری داشته باشد. این بردار به عنوان بردار جهش برای نسل بعدی انتخاب می‌شود.

این چهار مرحله به صورت تکراری اجرا می‌شوند تا به یک جواب بهینه یا نزدیک به آن برسیم. روش بهینه‌سازی تکامل تفاضلی به دلیل سادگی پیاده‌سازی و قدرت در حل مسائل بهینه‌سازی پیچیده، به عنوان یک روش محبوب در علوم مهندسی، بهینه‌سازی و هوش مصنوعی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

## ۳ آزمایشات عددی

الگوریتم  $DE$  برای یافتن جواب بهینه معادلات ماتریسی خطی که در بالا بدان اشاره گردیده، با نرم افزار  $MATLAB$  پیاده سازی شده است. برای بررسی کارایی و روند همگرایی الگوریتم، از معادلات ماتریسی خطی متعددی استفاده شده است. در جدول ۱ خلاصه مشخصات ماتریس ضرایب دو معادله ماتریسی خطی نشان داده شده است. شکل ۱ مربوط به یک معادله ماتریس ضرایب  $A_1$ ،  $2 \times 2$  و شکل ۲ مربوط به معادله با ماتریس ضرایب  $A_2$ ،  $3 \times 3$  می‌باشد و هر یک روند همگرایی جواب بهینه حاصل از الگوریتم را برای رسیدن به جواب معادله  $AX + XA^T = C$  نشان می‌دهند.

جدول ۱: مشخصات ماتریس‌ها

اندازه	ماتریس
$2 \times 2$	$A_1$
$3 \times 3$	$A_2$

<sup>1</sup>Differential Evolution Optimization Method (DE)

<sup>2</sup>Rainer Storn

<sup>3</sup>Kenneth Price

الگوریتم ۱ الگوریتم تکامل تفاضلی برای بهینه سازی حل معادلات ماتریسی خطی.

- ۱: شروع
- ۲: مقداردهی اولیه کنید و جمعیت اولیه  $X$  را تولید کنید.
- ۳: تازمانی که به معیار توقف نرسیده اید گام های زیر را انجام دهید:
  - (آ) برای هر فرد  $i$  در جمعیت مقادیر زیر را تولید کنید:
  - (i) سه عدد صحیح تصادفی به صورت زیر تولید کنید:

$$r_1, r_2, r_3 \in \{1, 2, \dots, NP\}, r_1 \neq r_2 \neq r_3$$

(ii) عدد صحیح تصادفی به صورت زیر تولید کنید:

$$k \in \{1, 2, \dots, D\}$$

(ب) جهش: مقدار زیر را محاسبه کنید:

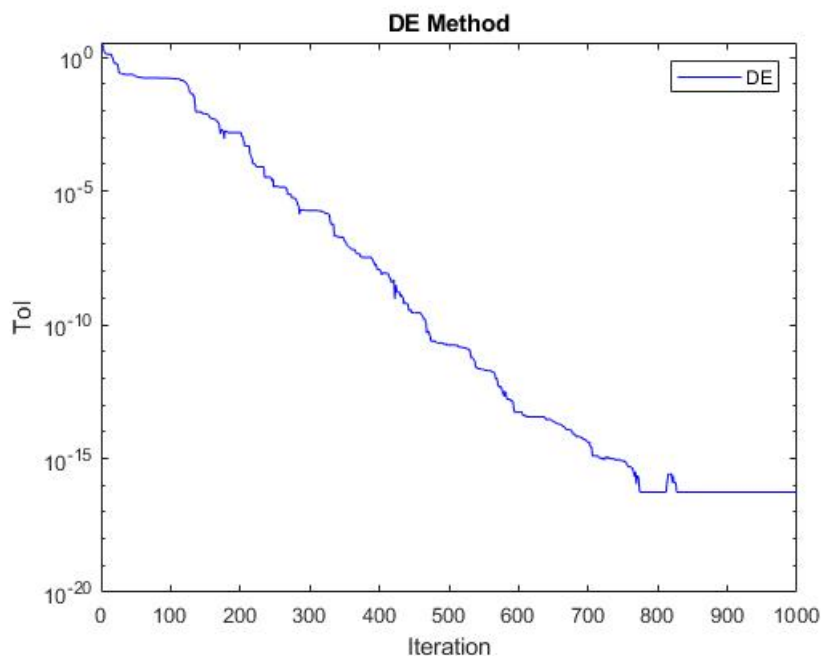
$$Y_i = x_{r_1} + F(x_{r_2} + x_{r_3}) \quad (F \text{ عددی بین } 0 \text{ و } 1 \text{ نرخ رشد جمعیت است})$$

(ج) تقاطع: مقدار  $X$  و  $Y$  را به صورت زیر با هم ترکیب کنید:

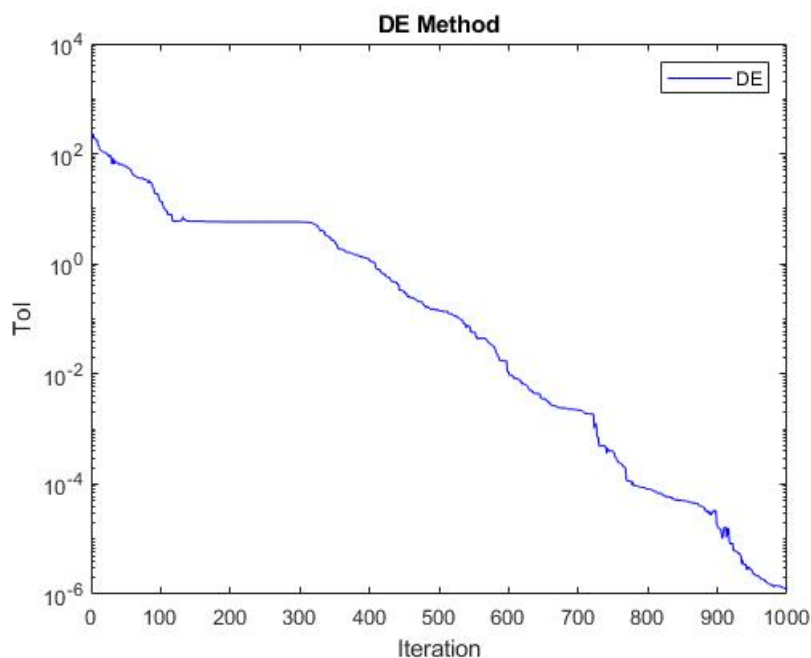
$$Z_i = \begin{cases} Y_{i,j} & \text{اگر } j = k \text{ یا } \text{rand}_{i,j}[0, 1] \leq CR \text{ (احتمال تقاطع)} \\ X_{i,j} & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

بهترین جواب را به روزرسانی کنید.

۴: پایان



شکل ۱: روند همگرایی الگوریتم برای معادله با ماتریس ضرایب  $A_1$



شکل ۲: روند همگرایی الگوریتم برای معادله با ماتریس ضرایب  $A_2$

#### ۴ نتیجه گیری

در این مقاله الگوریتم  $DE$  برای یافتن جواب بهینه معادله ماتریسی خطی ارائه شده است. این روش برخلاف روش‌های تکراری دیگر هیچ محدودیتی ندارد. الگوریتم  $DE$  روشی ساده برای به دست آوردن جواب بهینه است. همانطور که در مثال‌ها نشان داده شده است، روند همگرایی حاکی از کارایی الگوریتم می‌باشد. همچنین این الگوریتم با کارایی موثر برای معادلات ماتریسی خطی با ماتریس ضرایب غیر مربعی و ماتریس ضرایب تنک قابل استفاده است.

#### مراجع

- [1] K. Price, RM. Storn and JA. Lampinen, *Differential evolution: a practical approach to global optimization*, Springer Science & Business Media, 2006.
- [2] D. Kressner and P. Sirković, Truncated low-rank methods for solving general linear matrix equations, *Numerical Linear Algebra with Applications.*, 22 (2015), 564–83.
- [3] M.Montes, E. and Coello, C.A.C., *An empirical study about the usefulness of evolution strategies to solve constrained optimization problems*, Int. J. Gen. Syst., 37,(2008) 443–473.



دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران

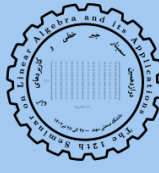
دوازدهمین سمینار بین المللی

جبر خطی

و کاربردهای آن



۲۷ الی ۲۸ تیرماه ۱۴۰۲



Sahand University of Technology, Tabriz, Iran

The 12th International Seminar on

Linear Algebra

and its Applications

July 18 - 19, 2023



## کارگاه جبر خطی تجربی

فرشید عبدالمهی\*

گروه ریاضی، دانشگاه شیراز

### چکیده

ریاضیات تجربی رویکردی به ریاضیات است که در آن از محاسبات برای بررسی ساختارهای ریاضی و شناسایی ویژگی‌ها و الگوهای اساسی آنها استفاده می‌شود [۱]. همانند علوم تجربی، ریاضیات تجربی را می‌توان به منظور جمع‌آوری شواهدی برای حمایت از ادعاهای خاصی که خود ممکن است حاصل شده از محاسبات باشد، استفاده کرد و سپس با استدلال و یا آزمایش‌های محاسباتی اضافی آنرا تأیید یا رد کرد. در این کارگاه ابتدا جبرخطی تجربی معرفی شده و نمونه‌هایی عملی از جبرخطی تجربی آورده می‌شود. همچنین مفاهیمی از جبر خطی در متلب و پایتون، یکی از قدرتمندترین زبان‌های برنامه نویسی، و استفاده از آن برای جبرخطی تجربی، علم داده، یادگیری ماشین و ... بیان می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: ریاضیات تجربی، جبرخطی تجربی، علم داده، یادگیری ماشین، متلب و پایتون

کد موضوع بندی ریاضی [۲۰۱۰]: 68Txx, 65Fxx, 15Axx

بوروین و بیلی [۲] از اصطلاح ریاضیات تجربی به معنای روش شناسی انجام ریاضیات استفاده می‌کنند که شامل استفاده از محاسبات برای موارد زیر است:

۱. به دست آوردن بینش و شهود؛
۲. کشف الگوها و روابط جدید؛
۳. استفاده از نمایش‌گرهای گرافیکی برای پیشنهاد اصول اساسی ریاضی؛
۴. آزمایش و به ویژه رد حدس و گمان؛
۵. بررسی نتایج بدست آمده و تعیین میزان ارزش اثبات تحلیلی؛
۶. پیشنهاد رویکردهایی برای اثبات تحلیلی؛
۷. جایگزینی محاسبات دستی طولانی با محاسبات مبتنی بر رایانه؛
۸. تایید نتایج تحلیلی به دست آمده.

جبر خطی شاخه‌ای از ریاضیات است که به بررسی و مطالعه ماتریس‌ها، بردارها، فضاها، برداری (فضاهای خطی)، تبدیلات خطی، و دستگاه‌های معادلات خطی می‌پردازد. جبر خطی کاربردهای فراوان و گوناگونی در ریاضیات و محاسبات گسسته دارد. علاوه بر کاربردهای آن در زمینه‌هایی از خود ریاضیات همانند جبر مجرد، آنالیز تابعی، هندسه تحلیلی و آنالیز عددی، جبر خطی استفاده‌های وسیعی نیز در فیزیک، مهندسی، علوم طبیعی و علوم اجتماعی پیدا کرده است. در مباحث جبر خطی مانند معادلات خطی، مسائل مربوط به مقدار ویژه، تجزیه مقادیر منفرد یا تجزیه مقادیر تکیه

\*سخنران. آدرس ایمیل: [abdollahi@shirazu.ac.ir](mailto:abdollahi@shirazu.ac.ir)

(SVD)، تجزیه ماتریس‌های نامنفی (NMF)، تجزیه ماتریس‌های دودویی (BMF)، روش تجزیه و تحلیل مولفه اصلی (PCA)، برنامه‌ریزی خطی، بهینه‌سازی، معادلات دیفرانسیل خطی، روش‌های کاهش رتبه ماتریس، روش زیرفضای کرایلف و تقریب ماتریسی و کاربرد آن در فشرده‌سازی تصاویر، الگوریتم‌های داده کاوی (متن کاوی و بازیابی اطلاعات، خوشه بندی و بازیابی اطلاعات، جستجو در وب و مرتبه صفحات وب، تجزیه و تحلیل تصاویر) و ... اغلب در عمل توسط برنامه‌های کاربردی تجزیه و تحلیل داده‌های بزرگ استفاده می‌شود [۳].

به ویژه، الگوریتم‌های ماتریسی هسته اصلی تحلیل داده‌های بزرگ مدرن را تشکیل می‌دهند، زیرا ماتریس‌ها ساختار ریاضی مناسبی برای مدل‌سازی طیف وسیعی از داده‌های برنامه‌ها را فراهم می‌کنند. به عنوان مثال، اطلاعات مربوط به  $N$  شی با  $D$  ویژگی را می‌توان به راحتی توسط یک ماتریس  $N \times D$  توصیف کرد [۴].

ماتریس‌های بزرگ در استخراج ویژگی، خوشه‌بندی و طبقه‌بندی استفاده می‌شوند. تجزیه ماتریس در تحلیل مولفه‌های اصلی برای کاهش بعد استفاده می‌شود. به طور مشابه، بردارهای ویژه در روش رتبه بندی صفحات گوگل به کار برده می‌شوند [۵]. هدف از برگزاری این کارگاه آشنا نمودن مخاطب با تعدادی از ابزارهای رایانه‌ای مورد نیاز در جبرخطی تجربی است. در پایان این کارگاه، شرکت کنندگان، علاوه بر آشنایی با بسته‌های مقدماتی مورد نیاز برای جبرخطی تجربی، با مفاهیمی از جبر خطی مورد استفاده در علم داده- به صورت عملی- آشنا خواهند شد. به طور کلی، این کارگاه فرصت خوبی برای افراد علاقمند به جبرخطی تجربی خواهد بود تا با مفاهیم جبر خطی در متلب و پایتون، یکی از قدرتمندترین زبان‌های برنامه نویسی، و استفاده از آن برای جبرخطی تجربی، علم داده، یادگیری ماشین و ... بدست آورند.

## مراجع

- [1] E. W. Weisstein, Experimental Mathematics, Available: <https://mathworld.wolfram.com/ExperimentalMathematics.html>.
- [2] J. Borwein, K. Devlin, The Computer as Crucible: An Introduction to Experimental Mathematics, New York: A K Peters/CRC Press, 2008.
- [3] E. Tziperman, Applied Mathematics 120: Applied linear algebra and big data, 2016, Available: <https://canvas.harvard.edu/courses/4766>.
- [4] J. Yang, Randomized Linear Algebra for Large-Scale Data Applications, Stanford University, 2016, Available: <http://purl.stanford.edu/wr092fb7484>.
- [5] R. S. A. A. a. D. S. Carl Pettis, Infusion of Big Data Concepts Across the Undergraduate Computer Science Mathematics and Statistics Curriculum, ASEE Annual Conference & Exposition, Salt Lake City, UT, USA, June 24-27, 2018.

## نمایه نویسندگان مقالات فارسی

---

- الهی، عبدالله،\*۴۲  
ایراندوست پاکچین، صفر، ۴۲  
برخورداری فیروز آبادی، سعیده، ۳۲  
توانگر مروستی، فاطمه، ۳۲، ۵۱  
حاجی صادقی اصفهانی، مریم،\*۹  
حاجی‌پور، مجتبی،\*۳۶  
خسروجردی، محمدجواد،\*۲۵  
رجبعلی‌پور، مهدی،\*۱  
رحیمی، اصغر، ۴۲  
شاهزاده فاضلی، سید ابوالفضل،\*۳۲، ۵۱  
شایان فرد، فاطمه،\*۲۱، ۴۶  
شفیعی، علیرضا، ۲۱  
صفاپور، احمد،\*۶  
طالبی اربطانی، رقیه، ۳۶  
عبداللہی، فرشید،\*۵۵  
موسوی، اسراء، ۵۱  
نظری، علی محمد،\*۱۴  
یاحقی، بامداد،\*۳
- 

\*سخنران